А.Ф. БЕРМАНТ и Л.А. ЛЮСТЕРНИК

ТРИГОНОМЕТРИЯ

ФИЗМАТГИЗ • 1960

А. Ф. БЕРМАНТ и Л. А. ЛЮСТЕРНИК

ТРИГОНОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ
СТЕРЕОТИПНОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

11-2-2

Бермант Анисим Федорович и *Люстерник Лазарь Аронович*
Тригонометрия.
Редакторы: *А. З. Рывкин* и *Л. Я. Цлаф.*
Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.* Корректор *А. С. Бакулова*

Печать с матриц. Подписано к печати 7/III 1960 г. Бумага 84×108¹/₃₂.
Физ. печ. л. 5,63. Условн. печ. л. 9,23. Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 55 000 экз. Т-02776.
Цена книги 3 руб.

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

5-я типография Управления полиграфической промышленности Министерства культуры Латвийской ССР. Рига, пл. 17 июня, 1. Заказ № 1073.
Отпечатано с матриц Первой образцовой тип. им. А. А. Жданова.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию 6

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ПРОИЗВОЛЬНЫЕ УГЛЫ
И ИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Тригонометрические функции острого угла 7
1. Понятие функции 7
2. Основные тригонометрические функции 8
3. Основные соотношения между тригонометрическими функциями 11
4. Дополнительные углы и сходственные тригонометрические функции 12
5. Таблица значений тригонометрических функций 13

§ 2. Векторы 16
6. Положительные и отрицательные отрезки на оси 16
7. Векторы и их проекции 17
8. Свойства проекций 18

§ 3. Обобщение понятий угла и дуги 19
9. Углы и дуги, меньшие 360° 19
10. Углы и дуги, бо́льшие 360° 21
11. Отрицательные углы и дуги. Суммы углов и дуг 22

§ 4. Тригонометрические функции и их простейшие свойства 23
12. Определение тригонометрических функций 23
13. Знаки тригонометрических функций 27
14. Значения тригонометрических функций некоторых углов . 29
15. Построение значений тригонометрических функций . . . 30

§ 5. Некоторые важнейшие формулы 33
16. Основные формулы 33
17. Тригонометрические тождества 35
18. Изменение знака угла 36
19. Тригонометрические функции дополнительных углов . . . 38

§ 6. Приведение к острому углу 39
20. Приведение к углу, меньшему 360° 39

21. Формулы приведения 39
22. Приведение к острому углу 42
Задачи к главе I 43

ГЛАВА ВТОРАЯ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

§ 7. Тригонометрические функции числового аргумента и их периодичность 54

23. Радианное измерение дуг и углов 54
24. Определение тригонометрических функций числового аргумента 56
25. Периодичность тригонометрических функций 57

§ 8. Графики тригонометрических функций 59

26. График функции 59
27. Графики функций $\sin x$ и $\cos x$ 63
28. Графики функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ 65

§ 9. Изменения тригонометрических функций 68

29. Характер изменения $\sin x$ и $\cos x$ 68
30. Характер изменения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ 69

§ 10. Гармонические колебания 71

31. Простые гармонические колебания 71
32. График простого гармонического колебания 73
Задачи к главе II 74

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 11. Формулы сложения и вычитания 79

33. Обобщение формулы проекций 79
34. Формулы сложения и вычитания для косинуса 80
35. Формулы сложения и вычитания для синуса 82
36. Формулы сложения и вычитания для тангенса 83

§ 12. Формулы для двойного и половинного аргументов . . 84

37. Тригонометрические функции двойного аргумента . . . 84
38. Тригонометрические функции половинного аргумента . . 84
39. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента 86

§ 13. Преобразования произведений тригонометрических функций в сумму и обратные преобразования 87

40. Формулы для произведений синусов и косинусов 87
41. Приведение к виду, удобному для логарифмирования . . 88
42. Преобразования с помощью вспомогательного аргумента 89
Задачи к главе III 90

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 14. Обратные тригонометрические функции 99
43. Определения и общий вид для значений обратных тригонометрических функций 99
44. Главные значения обратных тригонометрических функций 102

§ 15. Изменения обратных тригонометрических функций . . 106
45. Общее понятие обратной функции 106
46. Функция $y = \operatorname{Arcsin} x$ и ее график 108
47. Функция $y = \operatorname{Arccos} x$ и ее график 110
48. Функция $y = \operatorname{Arctg} x$ и ее график 111
49. Функция $y = \operatorname{Arcctg} x$ и ее график 113

§ 16. Преобразования обратных тригонометрических функций 114
50. Простейшие преобразования 114
51. Дальнейшие преобразования 116

§ 17. Тригонометрические уравнения 120
52. Определение 120
53. Примеры уравнений 121
54. Один общий метод 126

Задачи к главе IV 128

ГЛАВА ПЯТАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТРЕУГОЛЬНИКА И РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 18. Основные зависимости между элементами треугольника 137
55. Постановка вопроса 137
56. Зависимость между углами треугольника 138
57. Теоремы синусов и косинусов 138

§ 19. Другие зависимости между элементами треугольника 141
58. Теорема тангенсов 141
59. Зависимости между площадью, периметром и другими элементами треугольника 142

§ 20. Логарифмы тригонометрических функций 145
60. Таблица логарифмов тригонометрических функций . . . 145
61. Применения логарифмической линейки в тригонометрических вычислениях 148

§ 21. Решение треугольников 150
62. Решение прямоугольных треугольников 150
63. Решение косоугольных треугольников 152
64. Измерения линий и углов на местности 159

Задачи к главе V 161

Сводка важных формул 168

Ответы 172

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В основу книги мы положили учебник тригонометрии для средней школы, написанный нами в 1938 г. по заданию Наркомпроса РСФСР и издававшийся Учпедгизом РСФСР в 1940, 1947, 1950 годах, а также Учпедгизом Грузинской ССР в 1948 г.

За истекшие 17 лет учебник многократно обсуждался в печати и педагогической и научной общественностью, был предметом опытного преподавания в ряде школ. Все это, а также анализ учебника в методической литературе (в книгах В. М. Брадиса, Н. М. Бескина, В. Г. Чичигина и др.) послужили нам для тщательной обработки книги при ее подготовке к изданию.

После каждой главы в книге помещены задачи и примеры, подобранные Р. И. Позойским.

Пользуемся случаем, чтобы выразить благодарность А. З. Рывкину, внесшему ряд ценных предложений по улучшению текста.

Мы будем признательны читателям за замечания и за сообщения об опыте работы с этой книгой.

А. Ф. Бермант, Л. А. Люстерник

Москва,
ноябрь 1955 г.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ПРОИЗВОЛЬНЫЕ УГЛЫ И ИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Тригонометрические функции острого угла

1. Понятие функции. Изучая различные вопросы математики, физики и других наук, мы замечаем, что некоторые из рассматриваемых величин сохраняют одно и то же значение, другие же изменяют свои значения.

Так, например, наблюдая свободное падение тела в пустоте, убеждаемся, что расстояние, пройденное телом, и его скорость изменяются, а ускорение остается неизменным $\left(\text{равным } 981\ \frac{см}{сек^2}\right)$.

Величину, которая в данном вопросе сохраняет одно и то же численное значение, называют *постоянной*; величину, которая в данном вопросе принимает различные численные значения, называют *переменной*.

В нашем примере ускорение — величина постоянная, а расстояние и скорость — величины переменные.

Переменные величины чаще всего изменяются не совсем произвольно, а в известной зависимости друг от друга: если одной из них придавать значения по нашему усмотрению, то вторая принимает не произвольные значения, а согласованные со значениями первой величины.

Например, если указать расстояние, пройденное свободно падающим телом до некоторого момента времени, то скорость тела в этот момент имеет уже вполне определенное значение, соответствующее пройденному телом расстоянию.

Та из переменных, значения которой выбираются произвольно, называется *независимой переменной* или *аргументом*. Переменная же, значения которой находятся по зна-

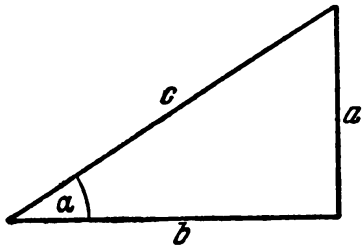
чениям независимой переменной (аргумента), называется *зависимой переменной* или *функцией*.

В нашем примере расстояние, проходимое падающим телом, и скорость тела находятся между собой в функциональной зависимости; если расстояние принять за независимую переменную, то скорость будет функцией [1]). С изменением пройденного расстояния меняется и скорость тела, причем так, что каждому значению расстояния соответствует определенное значение скорости.

Определение. *Функцией называется переменная величина, изменяющаяся в зависимости от изменения другой переменной величины (независимой переменной, аргумента), причем так, что каждому значению независимой переменной соответствуют строго определенные значения функции.*

Тригонометрия изучает важный класс функций — так называемых тригонометрических, а также их применения в геометрии. Само название «тригонометрия» (составлено из греческих слов: «тригонон» — треугольник и «метрезис» — измерение) показывает, что этот раздел математики связан с задачами решения треугольников, т. е. с задачами нахождения одних элементов треугольника по другим его известным элементам. Исторически тригонометрия и возникла из таких задач, но ими далеко не исчерпывается широкое применение тригонометрических функций в самых различных разделах математики, естествознания и техники.

2. Основные тригонометрические функции. Дадим прежде всего определения четырех основных величин, рассматриваемых в тригонометрии: *синуса, косинуса, тангенса, котангенса*, для случая острого угла.



Черт. 1.

Возьмем прямоугольный треугольник с заданным острым углом α (черт. 1) и пусть c — гипотенуза, a — катет, лежащий против угла α (противолежащий катет), и b — другой катет (прилежащий катет). Указанные величины определяются как отношения сторон такого прямоугольного треугольника, а именно:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad (1)$$

[1]) Можно, наоборот, считать скорость независимой переменной, тогда проходимое расстояние будет функцией.

т. е. *синусом острого угла называется отношение противолежащего катета к гипотенузе*;

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad (2)$$

т. е. *косинусом острого угла называется отношение прилежащего катета к гипотенузе*;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad (3)$$

т. е. *тангенсом острого угла называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету*;

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}, \qquad (4)$$

т. е. *котангенсом острого угла называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету.*

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для данного острого угла α не зависят от длин сторон a, b, c прямоугольного треугольника с углом α, взятого для нахождения этих значений, а зависят только от угла α.

В самом деле, если мы имеем другой прямоугольный треугольник, но с тем же острым углом α, то он будет подобен данному прямоугольному треугольнику и, следовательно, отношения сторон $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ останутся прежними. Поэтому в обозначении синуса ($\sin\alpha$) участвует только обозначение угла.

Нужно заметить, что символ sin, стоящий перед символом, обозначающим угол, сам по себе никакой величины не обозначает; он неотделим от символа α для угла. Вместе же с ним он образует единый, нерасчленяемый символ, обозначающий вполне определенное число, а именно: значение отношения $\frac{a}{c}$ при заданном угле α.

Это же замечание относится и к другим символам для остальных величин: косинуса ($\cos\alpha$), тангенса ($\operatorname{tg}\alpha$), котангенса ($\operatorname{ctg}\alpha$).

Мы видим, что каждая из величин: синус, косинус, тангенс, котангенс, имеет строго определенное значение для каждого данного острого угла α, причем с изменением угла α изменяются и значения этих величин. Таким образом, эти величины являются *функциями угла.*

Говорят, что $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ суть *тригонометрические функции острого угла α, который служит их аргументом.*

Значениями тригонометрических функций являются отвлеченные числа.

Построив прямоугольный треугольник с острым углом α и измерив его стороны, по формулам (1) — (4) можно получить приближенные значения тригонометрических функций угла α.

Для углов $\alpha = 30°$, $45°$, $60°$ легко найти точные значения тригонометрических функций:

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3};$$

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45° = 1, \quad \operatorname{ctg} 45° = 1;$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

В прямоугольном треугольнике с острыми углами 30° и 60° и гипотенузой c катет, противолежащий углу в 30° (и прилежащий к углу в 60°), равен $\frac{c}{2}$; поэтому

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}.$$

Другой катет, прилежащий к углу в 30° (и противолежащий углу в 60°), равен $\frac{c\sqrt{3}}{2}$; поэтому

$$\cos 30° = \sin 60° = \frac{c\frac{\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Далее,

$$\operatorname{tg} 30° = \operatorname{ctg} 60° = \frac{\frac{c}{2}}{c\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30° = \operatorname{tg} 60° = \frac{c\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}.$$

В прямоугольном треугольнике с двумя равными острыми углами в 45° и гипотенузой c оба катета равны $c\frac{\sqrt{2}}{2}$; поэтому

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{c\frac{\sqrt{2}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{c\frac{\sqrt{2}}{2}}{c\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Заметим, что, так как каждый катет всегда меньше гипотенузы, то *синус и косинус острого угла суть положительные числа, меньшие единицы.* Что касается *тангенса и котангенса острого угла, то они могут быть любыми положительными числами.*

3. Основные соотношения между тригонометрическими функциями. Четыре тригонометрические функции острого угла α связаны между собой тремя соотношениями:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (5)$$

Действительно, первое соотношение вытекает из теоремы Пифагора:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

откуда $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, т. е. $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$, что записывают короче так:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Итак, *сумма квадратов синуса и косинуса одного и того же острого угла равна единице.*

Второе и третье соотношения непосредственно следуют из определений:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Итак, *тангенс острого угла равен частному от деления синуса этого угла на его косинус, а котангенс острого угла равен частному от деления косинуса этого угла на его синус.*

Из соотношений (5), которые называются *основными*, можно вывести много других соотношений, например:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}; \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (6)$$

Первое из этих соотношений очевидно; второе получается так: из третьего равенства (5) имеем $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha$, т. е. $\cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$, а подставляя сюда выражение для $\cos^2\alpha$, находимое из первого равенства (5), получим $1 - \sin^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$, откуда и следует, что

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha};$$

таким же образом из второго и первого равенств (5) получается третье соотношение (6).

Пользуясь равенствами (5), а также следствиями из них, например равенствами (6), можно находить значения всех тригонометрических функций данного угла по значению одной из них. Например, пусть известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Из первого равенства (6) находим:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3},$$

а из третьего равенства (6) и из первого равенства (5) получаем:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Нетрудно заметить, что угол α при этом равен 30°.

Соотношения (5) и (6) являются примерами *тригонометрических тождеств* для острых углов, т. е. равенств, справедливых при любых значениях острого угла α.

4. Дополнительные углы и сходственные тригонометрические функции. Два острых угла α и $(90° - \alpha)$ называются *дополнительными. Сходственные тригонометрические функции* (т. е. синус и косинус, тангенс и котангенс) *дополнительных углов равны между собой*:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha; \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha; \qquad (7)$$

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha; \quad \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (7')$$

Эти соотношения сразу вытекают из рассмотрения прямоугольного треугольника с острым углом α на основании определений тригонометрических функций.

В самом деле, если в прямоугольном треугольнике один острый угол равен α, то другой равен $90° - \alpha$ (черт. 1). Катет a, противолежащий углу α, есть прилежащий к углу $90° - \alpha$, катет b, прилежащий к углу α, есть противолежащий углу $90° - \alpha$. Отсюда

$$\sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha \quad \text{и т. п.}$$

5. Таблица значений тригонометрических функций. Для решения задач (например, для решения прямоугольных треугольников, см. ниже) необходимо иметь значения тригонометрических функций острых углов. На стр. 14 приведена таблица таких значений (так называемая таблица натуральных значений тригонометрических функций). Она содержит значения тригонометрических функций для всех острых углов, выражающихся целым числом градусов (таблица через 1°). Значения даны с точностью до 0,001 [1]).

Для того чтобы найти в ней значение тригонометрической функции угла, меньшего 45°, нужно взять число, находящееся на пересечении строки, в которой слева указано данное число градусов, и столбца, в котором сверху указано наименование искомой функции.

Пример. $\operatorname{tg} 37° = 0{,}754$.

Если же отыскивают значение тригонометрической функции угла, большего 45°, то нужно взять число, находящееся на пересечении строки, в которой справа указано данное число градусов, и столбца, внизу которого указано наименование искомой функции.

Пример. $\cos 81° = 0{,}156$.

Таблица дает возможность решать и обратную задачу: по значению одной из тригонометрических функций находить угол. Для этого среди чисел второго и пятого столбцов, если дано значение синуса или косинуса, или третьего и четвертого столбцов, если дано значение тангенса или котангенса, разыскиваем число, равное данному. Тогда число градусов, указанное в строке, в которой находится заданное значение тригонометрической функции, показывает величину искомого угла. Число градусов нужно брать с левой стороны, если наименование заданной функции помещено

---

[1]) Заметим, что уже в XV веке в Самарканде были составлены таблицы синусов через 1′ с точностью до 10^{-9}.

Таблица значений тригонометрических функций

°	sin	tg	ctg	cos	°
1	0,017	0,017	57,290	0,9998	89
2	0,035	0,035	28,636	0,9994	88
3	0,052	0,052	19,081	0,9986	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
°	cos	ctg	tg	sin	°

вверху столбца, и с правой стороны, если наименование помещено внизу столбца.

Примеры. $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}649, \quad \alpha = 33°;$

$\sin\alpha = 0{,}743, \quad \alpha = 48°.$

По нашей таблице нельзя найти значение тригонометрической функции, если угол выражается не целым числом градусов. По ней нельзя найти также угол, если данного значения тригонометрической функции в таблице нет. На практике нередко заменяют данное значение угла (или тригонометрической функции) ближайшим к нему значением, имеющимся в таблице. При этом будет получаться хотя и приближенное значение искомой тригонометрической функции (или угла), но иногда достаточное для целей задачи.

Пользуясь таблицей натуральных значений тригонометрических функций и формулами, можно решать прямоугольные треугольники, т. е. зная некоторые из элементов такого треугольника (гипотенуза c, катеты a и b, острые углы α и β), найти другие. Поясним это на примерах.

Пример 1. Известно: $c = 20$ и $\alpha = 33°$. Найти: a, b и β.

В силу формул (1) $a = c\sin\alpha = 20 \cdot \sin 33° \approx 20 \cdot 0{,}545 \approx$ $\approx 10{,}9$ (значение $\sin 33° \approx 0{,}545$ находим из таблицы); $b = c \cdot \cos\alpha = 20 \cdot \cos 33° \approx 20 \cdot 0{,}839 \approx 16{,}8$. Кроме того,

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 33° = 57°.$$

Пример 2. Известно: $a = 10$, $\alpha = 42°$. Найти: b, c и β. Имеем:

$$b = a\operatorname{ctg}\alpha = 10 \cdot \operatorname{ctg} 42° \approx 10 \cdot 1{,}111 = 11{,}11$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} \approx \frac{10}{0{,}669} \approx 14{,}9;$$

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 42° = 48°.$$

Пример 3. Известно: $c = 10$, $a = 6{,}3$. Найти: b, α и β. Имеем:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{6{,}3}{10} = 0{,}63.$$

По таблице находим:

$$\alpha \approx 39°;$$

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 39° = 51°;$$

$$b = c\cos\alpha \approx 10 \cdot \cos 39° \approx 10 \cdot 0{,}777 \approx 7{,}8.$$

Пример 4. Известно: $a=8$, $b=10$. Найти: c, α и β.

Имеем: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=0{,}8$. Отсюда $\alpha\approx 39°$, далее:

$$\beta=90°-\alpha\approx 90°-39°=51°;$$

$$c=\frac{a}{\sin\alpha}\approx\frac{8}{\sin 39°}\approx\frac{8}{0{,}63}\approx 12{,}7.$$

Прежде чем перейти к обобщению определений тригонометрических функций на произвольные углы, обобщим само понятие угла и введем понятие вектора и его проекции.

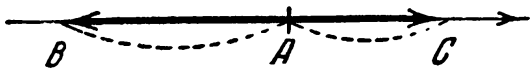
§ 2. Векторы

6. Положительные и отрицательные отрезки на оси. На любой прямой можно различать два противоположных направления. Например, на горизонтальной прямой — направления вправо и влево; на вертикальной прямой — направления вверх и вниз. Одно из них называют *положительным*, другое — *отрицательным*.

Прямая, на которой указано положительное направление, отмечено начало отсчета длин и выбрана единица длины (масштаб), называется осью. (Положительное направление обычно обозначается стрелкой.)

На прямолинейном отрезке направление определяется указанием его начала и его конца. Отрезок с началом в точке A и с концом в точке B обозначают через AB.

Отрезок оси называется *положительным*, если его направление совпадает с положительным направлением оси; он называется *отрицательным*, если его направление противоположно положительному направлению оси. На черт. 2 отрезок AC положительный, отрезок AB отрицательный.



Черт. 2.

Отрезок оси измеряется действительным числом, абсолютная величина которого равна длине отрезка в выбранном масштабе; это число положительное, если отрезок положительный, и отрицательное, если отрезок отрицательный. Оно называется алгебраической величиной отрезка.

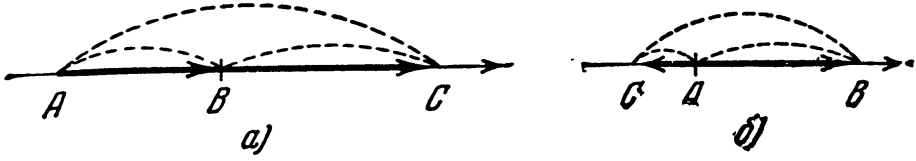
Алгебраические величины отрезков AB и BA отличаются только знаками. Точку можно рассматривать как отрезок, начало которого совпадает с концом; его алгебраической величиной служит число нуль.

Равенство $AB = a$ означает, что алгебраическая величина отрезка AB равна a (a — положительное или отрицательное число, или нуль); равенство

$$|AB| = c$$

означает, что длина отрезка AB равна c. Очевидно: $c = |a|$.

Суммой отрезков AB и BC оси (черт. 3) *называется отрезок AC той же оси.* Его алгебраической величиной является сумма алгебраических величин данных отрезков.



Черт. 3.

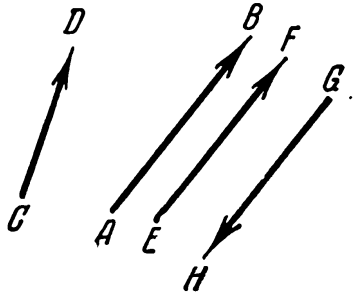
Суммой отрезков B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$ называют отрезок B_1B_n, началом которого служит начало первого отрезка и концом — конец последнего.

7. Векторы и их проекции. *Прямолинейный отрезок AB плоскости, имеющий направление* (от начала A к концу B), *называется вектором и обозначается так:* $\overline{AB}$.

Многие физические величины (скорость, ускорение, сила и т. п.) изображаются векторами. Длина отрезка AB называется *длиной* (или *модулем*) *вектора* $\overline{AB}$ и обозначается через $|\overline{AB}|$.

Считается, что два непараллельных вектора имеют разные направления (например, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ на черт. 4). Два вектора, параллельных или расположенных на одной прямой, могут иметь как одинаковые направления (векторы $\overline{AB}$ и $\overline{EF}$), так и противоположные (векторы $\overline{AB}$ и $\overline{GH}$, см. черт. 4).

Векторы называются равными, если они имеют одинаковые направлени и равные длины.

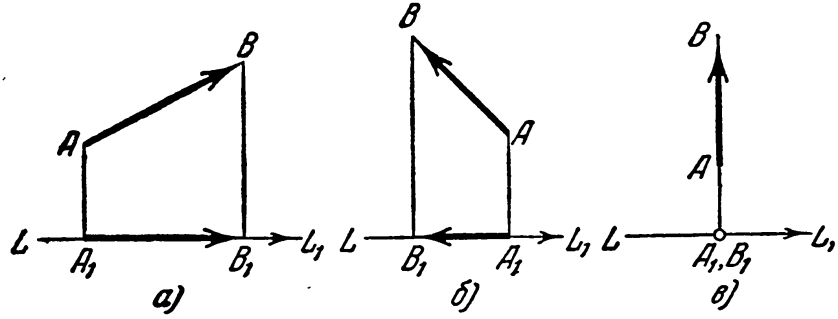


Черт. 4.

Напомним теперь, что *проекцией точки на прямую* называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Проекцией вектора на ось называется отрезок этой оси, начало и конец которого являются соответственно проекциями начала и конца данного вектора.

Проекция A_1B_1 вектора $\overline{AB}$ на ось LL_1 может иметь алгебраическую величину положительную (черт. 5, *а*), отрицательную (черт. 5, *б*) или нулевую (черт. 5, *в*); в последнем случае вектор $\overline{AB}$ перпендикулярен к оси LL_1.



Черт. 5.

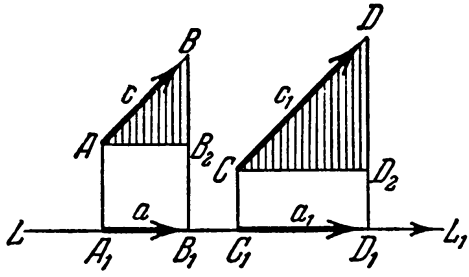
В дальнейшем, если нет опасности смешения понятий, будем для краткости вместо слов «алгебраическая величина проекции» говорить просто «проекция».

8. Свойства проекций.

Теорема 1. *Проекции одинаково направленных векторов на одну и ту же ось пропорциональны их длинам.*

Доказательство. Пусть $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ — одинаково направленные векторы, c и c_1 — их длины, a и a_1 — их проекции на ось LL_1 (черт. 6). Требуется доказать, что

$$\frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1}. \qquad (8)$$



Черт. 6.

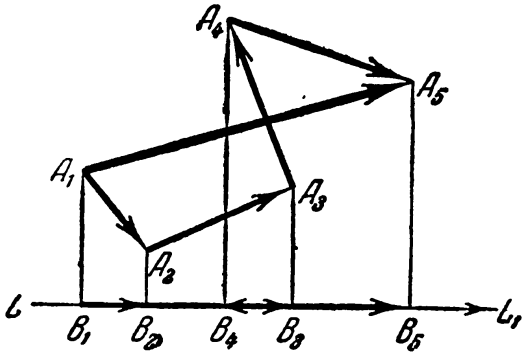
Опустим из точки A перпендикуляр AB_2 на BB_1 и из точки C — перпендикуляр CD_2 на DD_1. Длина отрезка AB_2 равна длине A_1B_1, т. е. $|A_1B_1|$; аналогично, длина отрезка CD_2 равна $|C_1D_1|$. Из подобия прямоугольных треугольников ABB_2 и CDD_2 следует:

$$\frac{|A_1B_1|}{c}=\frac{|C_1D_1|}{c_1}. \qquad (9)$$

Проекции A_1B_1 и C_1D_1 имеют на оси LL_1 одинаковое направление. Поэтому или обе они положительные, или обе — отрицательные. В первом случае $a = |A_1B_1|$, $a_1 = |C_1D_1|$ и пропорция (9) совпадает с пропорцией (8). Во втором случае $a = -|A_1B_1|$, $a_1 = -|C_1D_1|$ и пропорция (8) получится из пропорции (9) умножением обеих частей на -1. Теорема доказана.

Следствие. *Равные векторы имеют равные проекции.*

Рассмотрим теперь ломаную $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ (на черт. 7 взято $n = 5$), составленную из векторов $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$. Эти векторы называются *составляющими* ломаной, а вектор $\overline{A_1A_n}$ — *замыкающим* (он называется также *суммой* данных векторов).



Черт. 7.

Теорема II. *Проекция замыкающего вектора на ось равна сумме проекций составляющих векторов на ту же ось.*

Доказательство. Обозначим через B_1, B_2, B_3, ..., B_{n-1}, B_n проекции вершин A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n ломаной на некоторую ось LL_1. Проекциями составляющих векторов являются отрезки B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$ оси LL_1. По правилу сложения отрезков оси (п. 6) сумма этих отрезков есть отрезок B_1B_n. Но B_1B_n есть проекция замыкающего вектора $\overline{A_1A_n}$. Следовательно, алгебраическая величина проекции замыкающего вектора равна сумме алгебраических величин проекций составляющих векторов, ч. т. д.

§ 3. Обобщение понятий угла и дуги

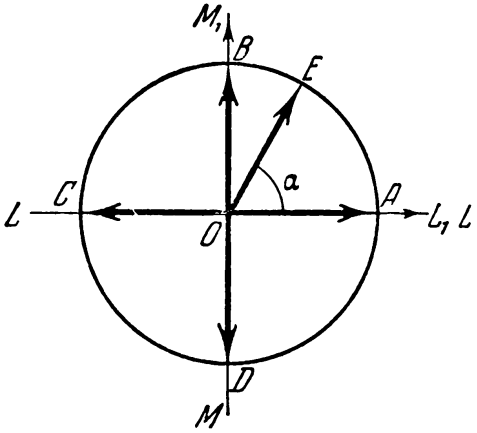
9. Углы и дуги, меньшие 360°. Так же как у отрезков мы различаем начальную и конечную точки, мы будем теперь различать у углов начальную и конечную стороны. Через AOB будем обозначать угол с начальной стороной OA и конечной OB. Мы будем считать, что угол AOB образован вращением подвижного луча вокруг точки O от начальной стороны OA до конечной стороны OB.

На плоскости возможны вращения в двух противоположных направлениях: в направлении против движения

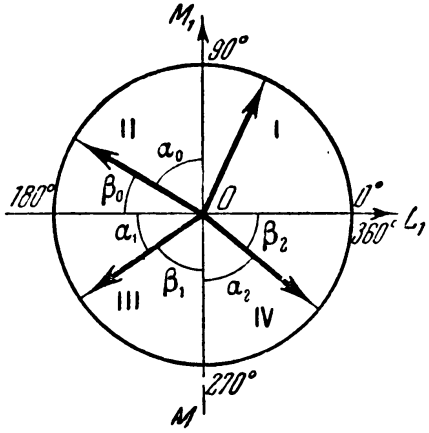
часовой стрелки и в направлении по движению часовой стрелки. Пока мы будем рассматривать вращения лишь против движения часовой стрелки.

Начальную сторону угла между вектором и осью мы всегда считаем направленной по оси (в ее положительном направлении). Иначе говоря, угол между вектором и осью мы отсчитываем от оси.

Рассмотрим углы, образованные подвижным вектором $\overline{OE}$ с осью LL_1 (черт. 8). При вращении вектора $\overline{OE}$ вокруг точки O его конец E описывает окружность с центром в точке O.



Черт. 8.



Черт. 9.

Проведем через точку O вторую ось MM_1 под углом в 90° к первой оси LL_1. Обычно на чертежах ось LL_1 (от которой отсчитываются углы) изображается горизонтальной, направленной слева направо. Вторая ось MM_1 изображается вертикальной, направленной снизу вверх.

Обе оси делят круг с центром в точке O на четыре четверти: первая четверть AOB, вторая — BOC, третья — COD и четвертая — DOA. Если сторона OE угла AOE расположена в первой, второй, третьей или четвертой четверти, то угол AOE называется, соответственно, углом первой, второй, третьей или четвертой четверти.

Углы первой четверти (острые) заключены между 0° и 90°; углы второй четверти (тупые) заключены между 90° и 180°; углы третьей четверти заключены между 180° и 270°; углы четвертой четверти заключены между 270° и 360° (черт. 9).

Углы второй четверти можно представить в виде $90° + \alpha_0$ или $180° - \beta_0$, где α_0 и β_0 — острые углы (см. черт. 9); углы третьей четверти — в виде $180° + \alpha_1$ или $270° - \beta_1$, где α_1 и β_1 — острые углы; углы четвертой четверти — в виде $270° + \alpha_2$ или $360° - \beta_2$, где α_2 и β_2 — острые углы.

Если вектор описывает угол AOE, равный α угловых градусов (см. черт. 8), то его конец описывает дугу $\overset{\smile}{AE}$ окружности, равную α дуговым градусам. Точка A является начальной точкой этой дуги, а точка E — ее конечной точкой.

Угол, равный 0° (нулевой угол), имеет совпадающие стороны. Соответствующая ему дуга в 0° (нулевая дуга) имеет совпадающие начальную и конечную точки.

Если точка E опишет один раз всю окружность, то вектор $\overline{OE}$ совершит вращение, равное полному обороту (360°), и вернется к исходному положению.

10. Углы и дуги, бо́льшие 360°. До сих пор мы рассматривали лишь вращения, не бо́льшие полного оборота (360°). Между тем часто приходится иметь дело с вращениями, бо́льшими полного оборота, например с вращением ключа, охватывающего гайку, вращением пропеллера и т. п. Таким образом, понятие угла (и дуги) необходимо обобщить: ввести углы (и дуги), бо́льшие полного оборота (большие 360°).

Возьмем угол $AOE = \alpha$, где $0 \leqslant \alpha < 360°$ (см. черт. 8). Пусть подвижной вектор, вращаясь от положения $\overline{OA}$, сначала сделает n полных оборотов, а затем опишет угол α. Очевидно, он попадет в положение вектора $\overline{OE}$. Скажем, что *вектор описал угол, равный* $n \cdot 360° + \alpha$. Существует бесконечное множество углов β с начальной стороной $\overline{OA}$ и конечной стороной $\overline{OE}$. Они выражаются формулой

$$\beta = n \cdot 360° + \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha < 360°, \tag{10}$$

где n — любое целое число, положительное или нуль.

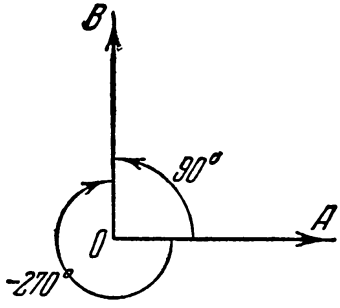
В технике углы измеряются иногда в частях полного оборота. Если, например, лопасть винта сделала $7\frac{1}{4}$ полного оборота, то это значит, что она, сделав 7 полных оборотов, повернулась еще на прямой угол $\left(\frac{1}{4}\right.$ полного оборота$\left.\right)$. Угол $7\frac{1}{4}$ оборота в градусной мере равен $7 \cdot 360° + 90° = 2610°$.

Когда вектор описывает угол $\beta = n \cdot 360° + \alpha$, его конец описывает дугу, равную сумме целого числа n полных

окружностей и дуги α. Существует бесконечное множество дуг, имеющих данное начало A и данный конец E. Они также выражаются формулой (10).

11. Отрицательные углы и дуги. Суммы углов и дуг. До сих пор мы допускали вращение только в одном направлении: против движения часовой стрелки. Такое вращение назовем *положительным*. Теперь мы будем допускать также и вращение по движению часовой стрелки; такое вращение назовем *отрицательным*. Угол, описанный при положительном вращении, назовем *положительным углом*, при отрицательном вращении — *отрицательным углом*.

Дуга окружности, описанная концом вектора при его положительном вращении, называется *положительной дугой*, при его отрицательном вращении — *отрицательной дугой*.

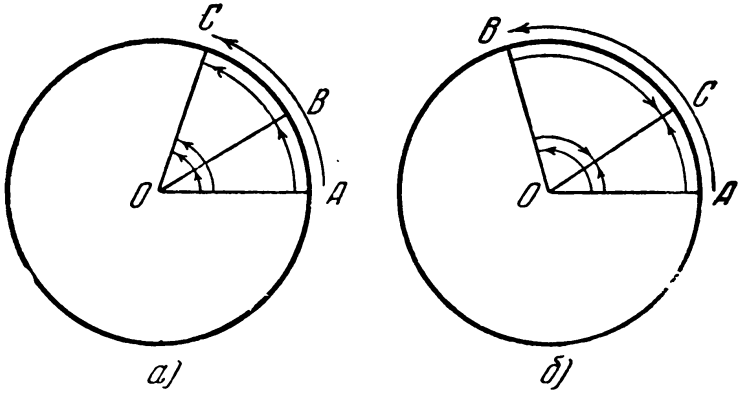


Черт. 10.

Угол (дуга) измеряется действительным числом, абсолютное значение которого равно величине угла (дуги); это число положительное, если угол (дуга) положительный, и отрицательное, если угол (дуга) отрицательный.

Пример. На черт. 10 отмечены два угла с начальной стороной OA и конечной стороной OB: один — равный $+90°$, другой — равный $-270°$.

Суммой двух углов AOB и BOC называется угол AOC.



Черт. 11.

Суммой дуг AB и BC одной и той же окружности называется дуга AC той же окружности (черт. 11).

Сумма углов или дуг измеряется алгебраической суммой чисел, измеряющих эти углы или дуги.

Если в формуле (10)

$$\beta = n \cdot 360^\circ + \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha < 360^\circ,$$

считать, что n есть не только положительное, но и отрицательное целое число, то эта формула станет пригодной для выражения любого как положительного, так и отрицательного угла.

Пример. $-1000^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 80^\circ$ ($n = -3$, $\alpha = 80^\circ$).

Заметим, что все углы β, выражаемые по формуле (10) при различных n, но одном и том же α, имеют общие начальную и конечную стороны. В силу этого построение любого угла β сводится к построению соответствующего положительного (или нулевого) угла α, меньшего 360°.

§ 4. Тригонометрические функции и их простейшие свойства

12. Определение тригонометрических функций. Рассмотрим на плоскости две оси: ось LL_1 (горизонтальная ось на черт. 12) и ось MM_1, образующую с осью LL_1 угол 90° (вертикальная ось на черт. 12).

Пусть вектор $\overline{OE}$ длины c образует угол $AOE = \alpha$ с осью LL_1. Обозначим через a_1 его проекцию OE_1 на ось LL_1, а через a_2 — его проекцию OE_2 на ось MM_1. Для краткости будем называть ось LL_1 (от которой отсчитываются углы) первой осью, ось MM_1 — второй осью, а числа a_1 и a_2 — соответственно первой и второй проекциями вектора $\overline{OE}$.

Если α — положительный острый угол (черт. 12, *а*), то направления проекций OE_1 и OE_2 совпадают с направлениями соответственных осей: a_1 и a_2 — числа положительные, равные длинам отрезков OE_1 и OE_2.

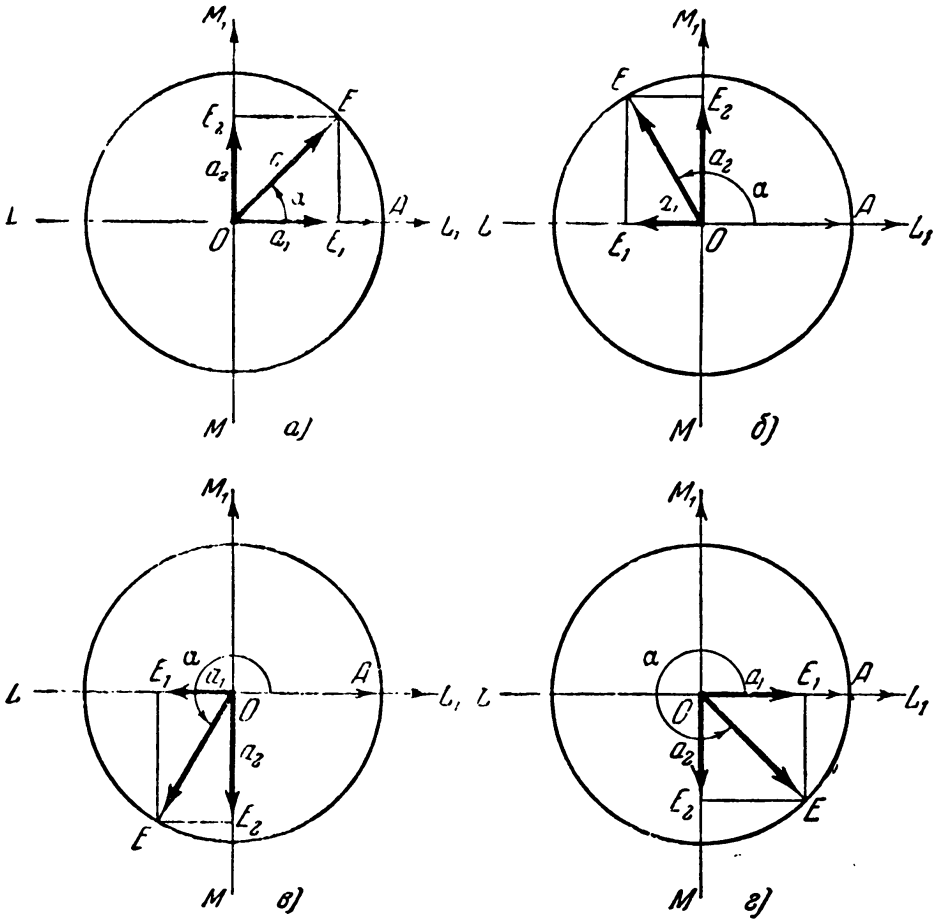
В прямоугольном треугольнике OE_1E гипотенуза $OE = c$; катет $OE_1 = a_1$ ($= b$); катет $E_1E = a_2$ ($= a$) (см. стр. 8, 9).

Из этого прямоугольного треугольника, в силу принятого определения тригонометрических функций острого угла (см. стр. 9), имеем:

$$\sin\alpha = \frac{a_2}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{a_1}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a_2}{a_1}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a_1}{a_2}. \quad (11)$$

Исходя из равенств (11), мы теперь определим тригонометрические функции произвольного угла.

Пусть $AOE = \alpha$ — произвольный угол, положительный, отрицательный или нулевой (на черт. 12 показаны различные случаи положения вектора OE).



Черт. 12.

Определения. Если вектор $\overline{OE}$ образует с осью LL_1 (с «первой осью») угол α, то

Синусом угла α называется отношение «второй проекции» вектора к его длине:

$$\sin\alpha = \frac{a_2}{c}. \qquad (12)$$

Косинусом угла α называется отношение «первой проекции» вектора к его длине:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{c}. \qquad (13)$$

Тангенсом угла α называется отношение «второй проекции» вектора к его «первой проекции»:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_2}{a_1}. \tag{14}$$

Котангенсом угла α называется отношение «первой проекции» вектора к его «второй проекции»:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a_1}{a_2}. \tag{15}$$

Аналогично определяются еще две тригонометрические функции, так называемые *секанс* (sec...) и *косеканс* (cosec...).

Секансом угла α называется отношение длины вектора к его «первой проекции»:

$$\sec\alpha = \frac{c}{a_1}. \tag{16}$$

Косекансом угла α называется отношение длины вектора к его «второй проекции»:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a_2}. \tag{17}$$

В последующем секанс и косеканс мы специально рассматривать не будем, так как они очень просто выражаются через синус и косинус:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}. \tag{18}$$

Это прямо следует из определений.

Теорема. *Отношения $\frac{a_2}{c}$, $\frac{a_1}{c}$, $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_1}{a_2}$, определяющие тригонометрические функции угла α, не зависят от длины вектора $\overline{OE}$; они зависят только от угла α.*

Доказательство. Рассмотрим наряду с вектором $\overline{OE}$ длины c вектор $\overline{OF}$ длины c', образующий тот же угол α с первой осью; обозначим через a_1' и a_2' первую и вторую проекции вектора $\overline{OF}$. В силу теоремы I п. 8 проекции a_2 и a_2' векторов $\overline{OE}$ и $\overline{OF}$ пропорциональны их длинам:

$$\frac{a_2}{c} = \frac{a_2'}{c'}.$$

Аналогично:

$$\frac{a_1}{c} = \frac{a'_1}{c'}.$$

Почленным делением этих равенств получаем также равенства:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a'_2}{a'_1}; \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{a'_1}{a'_2}.$$

Мы видим, что значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ действительно не зависят от длины взятого вектора.

Если первая проекция оказывается равной нулю ($a_1 = 0$), то тангенса угла α не существует. В самом деле, в этом случае дробь $\frac{a_2}{a_1}$, посредством которой определяется $\operatorname{tg}\alpha$, не имеет смысла.

Если вторая проекция оказывается равной нулю ($a_2 = 0$), то по аналогичной причине не существует котангенса.

Пример. $\angle AOE = \alpha = -45°$. Имеем (черт. 13):

$$a_1 = c\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_2 = -c\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Находим:

$$\sin(-45°) = \frac{a_2}{c} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(-45°) = \frac{a_1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}(-45°) = \frac{a_2}{a_1} = -1; \qquad \operatorname{ctg}(-45°) = \frac{a_1}{a_2} = -1.$$

Дадим теперь важную формулу для проекции вектора на ось. Именно:

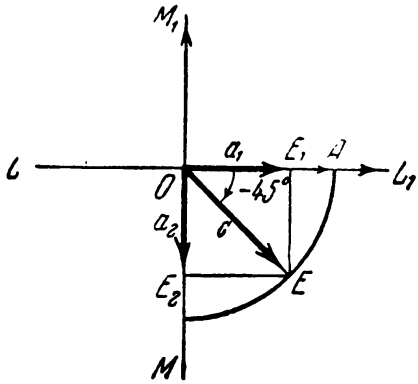
Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла вектора с осью.

В самом деле, из формулы (13) непосредственно следует:

$$a_1 = c\cos\alpha. \tag{19}$$

Эта формула означает, что проекция (a_1) некоторого вектора ($\overline{OE}$) на ось (LL_1), с которой этот вектор образует некоторый угол (α), равна длине вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью.

Формула (19) выведена в предположении, что начало вектора (O) лежит на оси проекции. Однако эта формула справедлива всегда. В самом деле, пусть задан любой вектор длины c, образующий угол α с осью проекции. Возьмем другой вектор с началом в какой-нибудь точке оси проекции и равный данному. Тогда этот вектор имеет ту же длину c и образует тот же угол α с осью проекции; в силу же свойств проекций (см. п. 8) оба вектора имеют равные проекции на ось. Так как формула (19) справедлива для второго вектора, то она справедлива и для данного вектора.



Черт. 13.

Замечание. Как мы знаем, существует бесконечное множество углов β с начальной стороной OA и конечной OE. Они выражаются формулой (10) (см. стр. 21):

$$\beta = n \cdot 360° + \alpha \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Так как всем этим углам соответствуют одни и те же числа a_1, a_2, c (проекции и длина одного и того же вектора $\overline{OE}$), то имеют место равенства:

$$\left.\begin{aligned} \sin(n \cdot 360° + \alpha) &= \sin\alpha; \\ \cos(n \cdot 360° + \alpha) &= \cos\alpha; \\ \operatorname{tg}(n \cdot 360° + \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha; \\ \operatorname{ctg}(n \cdot 360° + \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Обозначения этого параграфа мы сохраняем во всей главе.

13. Знаки тригонометрических функций. Выясним теперь знаки тригонометрических функций для углов, заключенных между 0° и 360° [1]).

Знак синуса. *Синус положителен в первой и второй четвертях, отрицателен в третьей и четвертой четвертях.*

---

[1]) Для краткости будем вместо выражения «тригонометрическая функция для углов в первой, во второй, ... четверти» употреблять выражение «тригонометрическая функция в первой, во второй, ... четверти».

В силу формулы (12)

$$\sin\alpha = \frac{a_2}{c}$$

знак синуса совпадает со знаком $a_2 = OE_2$ (ибо длина c — всегда положительное число).

В первой и второй четвертях проекция OE_2 направлена вверх и, значит, a_2 имеет знак плюс, а в третьей и в четвертой четвертях проекция OE_2 направлена вниз и, значит, a_2 имеет знак минус.

Знак косинуса. *Косинус положителен в первой и четвертой четвертях, отрицателен во второй и третьей четвертях.*

В силу формулы (13)

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{c}$$

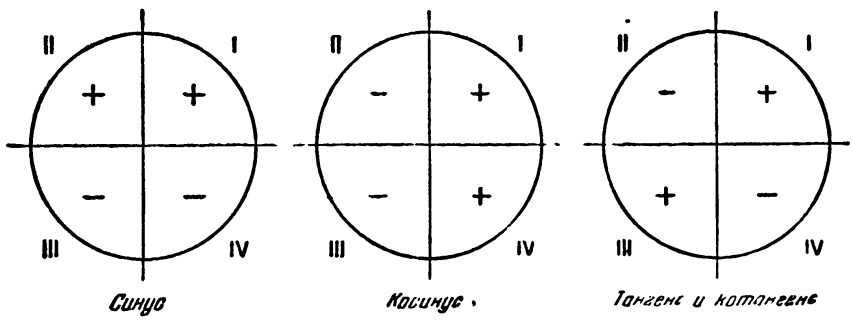
знак косинуса совпадает со знаком $a_1 = OE_1$; в первой и четвертой четвертях a_1 положительно, так как проекция OE_1 направлена вправо, а во второй и третьей четвертях a_1 отрицательно, так как проекция OE_1 направлена влево.

Знаки тангенса и котангенса. *Тангенс и котангенс положительны в первой и третьей четвертях, отрицательны во второй и четвертой четвертях.*

В силу формул (14) и (15)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_2}{a_1}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a_1}{a_2}$$

тангенс и котангенс имеют знак плюс, если a_1 и a_2 одного



Черт. 14.

знака, т. е. в первой и третьей четвертях, и они имеют знак минус, если a_1 и a_2 разных знаков, т. е. во второй и четвертой четвертях.

Схема знаков тригонометрических функций дана на черт. 14.

14. Значения тригонометрических функций некоторых углов.

Угол 0°. Подвижной вектор $\overline{OE}$ занимает положение $\overline{OA}$ (черт. 15), значит, $a_1 = c$, $a_2 = 0$. Следовательно:

$$\sin 0° = \frac{0}{c} = 0; \quad \cos 0° = \frac{c}{c} = 1; \quad \operatorname{tg} 0° = \frac{0}{c} = 0.$$

Котангенса угла 0° не существует (так как $a_2 = 0$).

Угол 90°. Подвижной вектор $\overline{OE}$ занимает положение $\overline{OB}$ (черт. 15), $a_1 = 0$, $a_2 = c$. Следовательно:

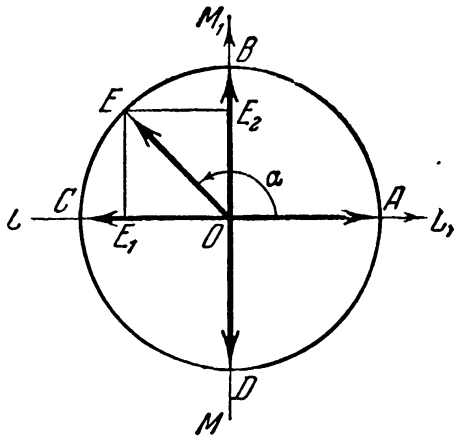
$$\sin 90° = \frac{c}{c} = 1; \quad \cos 90° = \frac{0}{c} = 0; \quad \operatorname{ctg} 90° = \frac{0}{c} = 0.$$

Тангенса угла 90° не существует.

Угол 180°. Подвижной вектор $\overline{OE}$ занимает положение $\overline{OC}$ (черт. 15), $a_1 = -c$, $a_2 = 0$. Следовательно:

$$\sin 180° = \frac{0}{c} = 0, \quad \cos 180° = \frac{-c}{c} = -1, \quad \operatorname{tg} 180° = \frac{0}{-c} = 0.$$

Котангенса угла 180° не существует.



Черт. 15.

Угол 270°. Подвижной вектор $\overline{OE}$ занимает положение $\overline{OD}$ (черт. 15), $a_1 = 0$, $a_2 = -c$. Следовательно:

$$\sin 270° = \frac{-c}{c} = -1, \quad \cos 270° = \frac{0}{c} = 0, \quad \operatorname{ctg} 270° = \frac{0}{-c} = 0.$$

Тангенса угла 270° не существует.

Приведем таблицу уже известных нам значений тригонометрических функций для углов $\alpha = 0°$, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270° (стр. 10 и 29).

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

15. Построение значений тригонометрических функций.

Синус, косинус. Пусть теперь вектор $\overline{OE}$ есть *единичный вектор*, т. е. его длина в выбранном масштабе равна 1 ($c = 1$). Формулы (12) и (13) примут вид:

$$\sin\alpha = a_2; \quad \cos\alpha = a_1.$$

Находить значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ построением и измерением особенно удобно на основании именно этих формул.

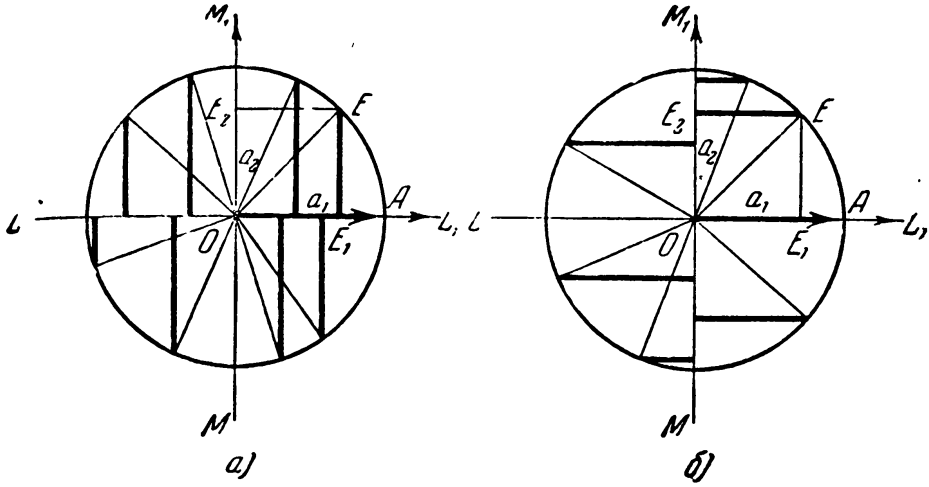
Построим (черт. 16) оси LL_1 и MM_1; отложим единичный вектор $\overline{OE}$ под углом α к оси LL_1; проведем его проекции $a_1 = OE_1 = E_2E$ и $a_2 = OE_2 = E_1E$.

Проекции E_1E для различных углов и дают значения синуса (на черт. 16, *а* они изображены жирными отрезками). Проекции E_2E (черт. 16, *б*) дают значения косинуса.

Тангенс. Через точку A первой оси (черт. 17) проведем вертикальную ось PP_1, направленную снизу вверх. Эта ось касается в точке A единичной окружности (т. е. окружности радиуса 1). Пусть вектор $\overline{OE}$ образует угол α с первой осью. Продолжим прямую, на которой расположен вектор $\overline{OE}$, до пересечения ее в точке G с осью PP_1. Докажем, что *алгебраическая величина d отрезка AG оси PP_1 равна значению* $\operatorname{tg}\alpha$.

Рассмотрим отдельно два случая.

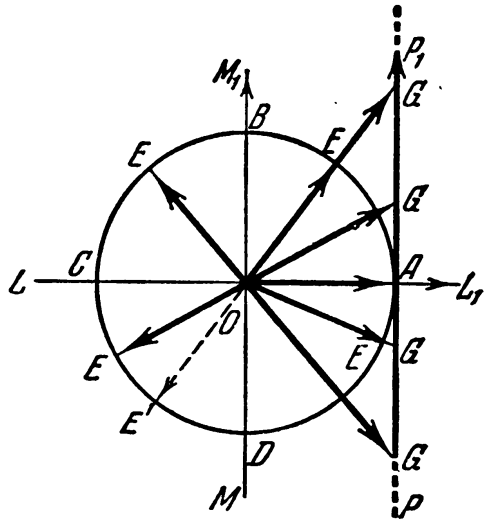
Случай 1. Вектор $\overline{OE}$ расположен в первой или четвертой четверти (черт. 17). Векторы $\overline{OE}$ и $\overline{OG}$ имеют оди-



Черт. 16.

наковое направление и поэтому образуют один и тот же угол α с первой осью. Первая проекция вектора $\overline{OG}$ равна $OA = 1$; вторая проекция вектора $\overline{OG}$ равна $AG = d$. По определению тангенса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{1} = d.$$



Черт. 1

Случай 2. Вектор $\overline{OE}$ расположен во второй или третьей четверти (черт. 17). Одинаковое направление с вектором $\overline{OE}$ имеет теперь вектор $\overline{GO}$. Первая проекция вектора $\overline{GO}$ равна $AO = -OA = -1$; вторая проекция вектора $\overline{GO}$ равна $GA = -AG = -d$. По определению тангенса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-d}{-1} = d.$$

Итак, наше предложение доказано в обоих случаях.

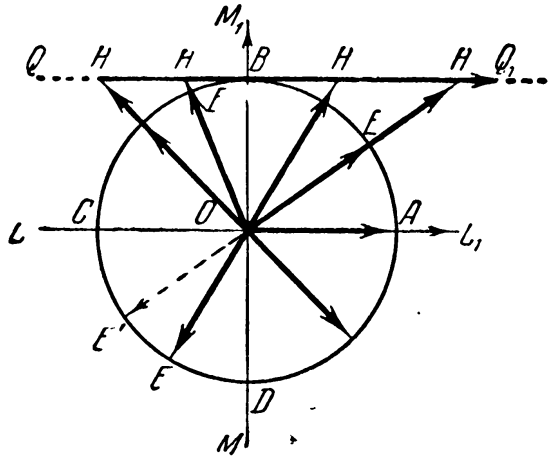
Если $\alpha = 90°$ или $\alpha = 270°$, то вектор $\overline{OE}$ параллелен оси PP_1 и прямая, на которой он лежит, не пересекает ось (точки G не существует). Это и является геометрической иллюстрацией того, что $\operatorname{tg} 90°$ и $\operatorname{tg} 270°$ не существует.

Из изложенного построения тангенса мы замечаем, что тангенсы углов, отличающихся друг от друга на 180°, равны между собой:

$$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Действительно, векторы $\overline{OE}$ и $\overline{OE'}$, образующие с первой осью эти углы (см. черт. 17), лежат на одной прямой и поэтому им соответствует одна и та же точка G, а значит, и одно и то же значение $\operatorname{tg} \alpha$.

Котангенс. Проведем горизонтальную ось QQ_1 (черт. 18), касательную к единичной окружности в точке B и направленную слева направо.



Черт. 18.

Продолжим прямую, на которой расположен вектор $\overline{OE}$, образующий угол α с осью LL_1, до пересечения в точке H с осью QQ_1.

Так же как и в случае тангенса, читатель докажет, что *алгебраическая величина* d_1 *отрезка* BH *оси* QQ_1 *равна* $\operatorname{ctg} \alpha$, т. е. $d_1 = \operatorname{ctg} \alpha$.

Здесь также геометрически наглядно видно, что $\operatorname{ctg} 0°$ и $\operatorname{ctg} 180°$ не существует.

Для котангенса, подобно тангенсу,

$$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Эту формулу можно вывести также геометрически.

Из доказанных свойств тангенса и котангенса вытекают следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(n \cdot 180^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(n \cdot 180^\circ + \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

где n — любое целое число или нуль: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ В самом деле, раз углы, отличающиеся на один полуоборот (180°), имеют одинаковые тангенс и котангенс, то углы, отличающиеся на любое целое число полуоборотов, также имеют одинаковые тангенс и котангенс.

Рассмотрим теперь два примера обратной задачи: отыскания углов по заданному значению тригонометрической функции. Эти примеры нам пригодятся в дальнейшем.

1. Найдем все углы α, для которых $\cos\alpha = 1$, т. е. для которых $a_1 = OE_1 = 1$ (см. п. 14). Это означает, что OE_1 совпадает с отрезком OA и угол $\alpha = \angle AOE$ имеет совпадающие стороны. Следовательно, он равен целому числу n полных оборотов или нулю:

$$\alpha = n \cdot 360^\circ, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2. Найдем все углы α, для которых $\operatorname{tg}\alpha = 0$. Из построения тангенса (см. черт. 17) следует, что если $\operatorname{tg}\alpha = 0$, то отрезок AG есть нулевой отрезок и точка G совпадает с точкой A. Вектор $\overline{OE}$ при этом совпадает с вектором $\overline{OA}$ или вектором $\overline{OC}$. Значит, угол $\alpha = \angle AOE$ равен целому числу n полуоборотов; $\alpha = n \cdot 180^\circ$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

§ 5. Некоторые важнейшие формулы

16. Основные формулы.

Теорема. *Между значениями тригонометрических функций одного угла существуют соотношения* [см. формулы (5)]:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

называемые основными.

Доказательство. В п. 3 было доказано, что эти соотношения имеют место для любого острого угла α. Докажем теперь, что они справедливы для произвольного угла α.

Пусть $\overline{OE}$ — единичный вектор, образующий угол α с первой осью (см. черт. 15). Значит, $a_1 = OE_1 = \cos\alpha$, $a_2 = OE_2 = \sin\alpha$. В прямоугольном треугольнике OE_1E имеем:

$$|\overline{OE}| = 1, \quad |OE_1| = |\cos\alpha|, \quad |E_1E| = |OE_2| = |\sin\alpha|.$$

Из теоремы Пифагора следует:

$$|\sin\alpha|^2 + |\cos\alpha|^2 = 1.$$

При возвышении в квадрат знак абсолютной величины можно опустить, и мы получаем:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{22}$$

Первая основная формула доказана.

Далее,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{23}$$

Это — вторая основная формула.

Аналогично получаем третью основную формулу:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{24}$$

Из основных формул (для произвольных углов α) можно вывести ряд других формул. Например, из формул (23) и (24) следует:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{25}$$

Точно так же из формул (23) и (22) вытекает:

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Из последних формул получаем:

$$\operatorname{tg}^2\alpha(1-\sin^2\alpha) = \sin^2\alpha, \quad \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha = 1-\cos^2\alpha,$$

откуда

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{26}$$

С помощью найденных формул можно отыскивать значения всех тригонометрических функций данного угла, если известно значение одной из них.

В некоторых из употребляемых при этом формул встречаются квадратные корни. Перед корнем может стоять тот или другой из двух знаков в зависимости от величины угла. Поэтому записывают, например, так:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Если угол α известен, то тем самым известны и знаки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ и перед квадратным корнем выбирается соответствующий знак.

Пример. $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Найти $\cos 135^\circ$, $\operatorname{tg} 135^\circ$, $\operatorname{ctg} 135^\circ$.

Угол в 135° есть угол второй четверти, где косинус отрицательный. Следовательно:

$$\cos 135^\circ = -\sqrt{1-\sin^2 135^\circ} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

и дальше:

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = -1; \qquad \operatorname{ctg} 135^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 135^\circ} = -1.$$

17. Тригонометрические тождества.

Определение. *Тригонометрическим тождеством называется равенство, содержащее тригонометрические функции угла и справедливое при всех значениях этого угла.*

Три основные формулы (22), (23) и (24) являются тригонометрическими тождествами; они справедливы для любого угла α. Тождествами являются также и равенства (25) и (26).

Разумеется, при этом не принимаются в расчет те значения угла α, для которых хотя бы одна из входящих в равенство функций не существует. Например, равенство $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$ есть тригонометрическое тождество, так как оно справедливо для всех углов α, за исключением тех, для которых тангенс или котангенс не существует (0°, 90°, 180°, 270°, ...).

Из одних тригонометрических тождеств с помощью алгебраических преобразований можно получить другие тригонометрические тождества. Таким путем выведены, например, тождества (25) и (26) из тождеств (22)—(24).

О тождествах говорят, что они **зависимы друг от друга**, если некоторые из них можно вывести из других. В таком случае говорят также, что одни из них являются **следствиями** других.

Из трех основных формул (22) — (24) можно образовать сколько угодно формул, являющихся их следствиями. Но сами основные формулы не зависят друг от друга: нельзя одну из них вывести из двух остальных. Основные формулы получаются независимо одна от другой на основании самих определений тригонометрических функций.

Три любых независимых тождества, связывающих четыре тригонометрические функции, например одна из формул (25) и формулы (26), позволяют по значению одной из них найти значения остальных.

Иногда требуется доказать тождество, т. е. установить, что данное равенство действительно является тригонометрическим тождеством. Для этого нужно или посредством тождественных алгебраических преобразований и основных формул (22) — (24) привести заданное равенство к уже известному тождеству или, исходя из какого-нибудь известного тождества, с помощью тождественных алгебраических преобразований и основных формул придти к данному равенству.

Пример. Доказать тождество

$$\sin^3\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

Заменим в левой части $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ их выражениями по формулам (23) и (24). Получим:

$$\sin^3\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+\cos^3\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=$$

$$=\sin^3\alpha\,\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos^3\alpha\,\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\sin^2\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha)=$$

$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\,(\sin\alpha+\cos\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

Последнее преобразование выполнено с помощью формулы (22). Приходим к очевидному тождеству

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

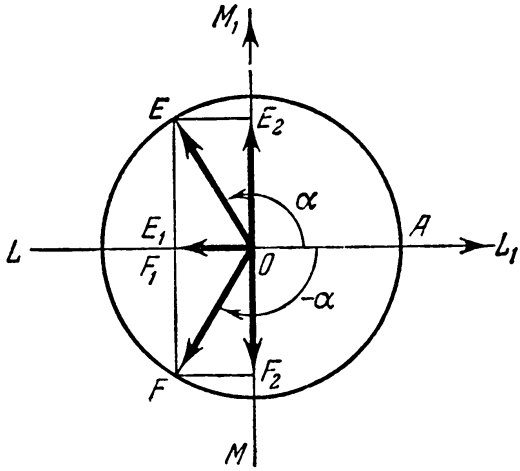
Этим доказано исходное тождество.

18. Изменение знака угла. Выразим теперь тригонометрические функции угла $-\alpha$ через тригонометрические функции угла α.

Теорема. *При перемене знака угла значение косинуса не меняется, а значения синуса, тангенса и котангенса меняют только свой знак.*

Доказательство. Пусть дуга $\overset{\smile}{AE}$ единичной окружности равна α; симметричная с ней относительно первой оси LL_1 дуга $\overset{\smile}{AF}$ (черт. 19) равна $-\alpha$. Соответствующие этим дугам центральные углы AOE и AOF равны соответственно α и $-\alpha$. Так как векторы $\overline{OE}$ и $\overline{OF}$ симметричны относительно оси LL_1, то их первые проекции совпадают: $OE_1 = OF_1$. Эти проекции равны соответственно $\cos\alpha$ и $\cos(-\alpha)$; отсюда следует, что

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha. \quad (27)$$



Черт. 19.

Вторые же проекции OE_2 и OF_2 равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Эти проекции равны соответственно $\sin\alpha$ и $\sin(-\alpha)$; отсюда следует, что

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha. \quad (28)$$

Далее находим:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(-\alpha) &= \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= \frac{1}{\operatorname{tg}(-\alpha)} = \frac{1}{-\operatorname{tg}\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

ч. т. д.

Определение. *Если функция не меняет своего значения при изменении знака у любого значения своего аргумента, то она называется четной функцией; если же значение функции меняет только свой знак при изменении знака у любого значения аргумента, то она называется нечетной функцией.*

Формулы (27) — (29) показывают, что $\cos\alpha$ — *четная функция угла* α, а $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ — *нечетные функции угла* α.

Другими примерами четных функций могут служить функции $y = x^2$, $y = x^4$ и т. п. аргумента x, а нечетных функций — функции $y = x$, $y = x^3$ и т. п. аргумента x.

Формулы (27) — (29) позволяют выразить значения тригонометрических функций отрицательных углов через значения тригонометрических функций положительных углов.

Примеры.

$$\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1; \quad \operatorname{ctg}(-45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1.$$

19. Тригонометрические функции дополнительных углов.

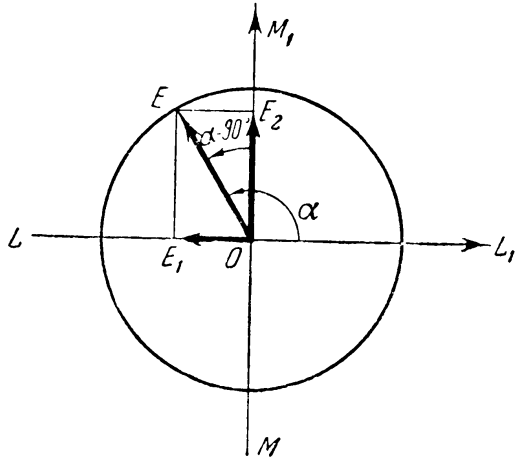
Теорема. *Для произвольного угла α существуют соотношения:*

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha; \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha. \qquad (7)$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha; \quad \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (7')$$

[Углы α и $90^\circ - \alpha$ — дополнительные; см. соотношения (7) и (7′) на стр. 12.]

Доказательство. Справедливость этих соотношений для любого острого угла была доказана в п. 4, а теперь мы докажем их для произвольного угла.



Черт. 20.

Если единичный вектор $\overline{OE}$ образует угол α с первой осью LL_1 (на черт. 20 угол α взят во второй четверти), то со второй осью MM_1 он образует угол $\beta = \alpha - 90^\circ$.

Проекция OE_2 вектора $\overline{OE}$ на ось MM_1 равна, по определению синуса:

$$OE_2 = \sin\alpha.$$

С другой стороны, по формуле проекций (19) та же проекция равна:

$$OE_2 = 1 \cdot \cos(\alpha - 90^\circ) = \cos(90^\circ - \alpha)$$

(косинус не меняется от перемены знака угла).

Сравнивая два последних равенства, получаем вторую формулу (7):

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Если в этой формуле вместо угла α взять угол $90° - \alpha$, то придем к первой формуле (7):

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha).$$

Из формул (7) вытекают формулы (7'), ч. т. д.

§ 6. Приведение к острому углу

20. Приведение к углу, меньшему 360°. Обратимся к важной задаче приведения тригонометрических функций к острому углу, т. е. к задаче выражения тригонометрических функций любого угла через тригонометрические функции острого угла.

На основании формул (20) мы можем сразу привести тригонометрические функции любого угла к тригонометрическим функциям неотрицательного угла, меньшего 360°. В самом деле, любой угол β можно представить так:

$$\beta = n \cdot 360° + \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha < 360°, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (10)$$

Формулы же (20) дают:

$$\sin\beta = \sin\alpha, \quad \cos\beta = \cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Пример. $750° = 2 \cdot 360° + 30°$, откуда

$$\sin 750° = \sin 30° = \frac{1}{2}; \quad \cos 750° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \ldots$$

Что же касается специально тангенса и котангенса, то их на основании формул (21) можно сразу привести и к углу, меньшему 180°.

Пример.

$$\operatorname{tg} 585° = \operatorname{tg}(3 \cdot 180° + 45°) = \operatorname{tg} 45° = 1.$$

21. Формулы приведения.

Определение. *Формулами приведения называются формулы, выражающие тригонометрические функции углов*

$$90° \pm \alpha, \quad 180° \pm \alpha, \quad 270° \pm \alpha, \quad 360° - \alpha$$

через тригонометрические функции угла α.

Углы $180° \pm \alpha$, $360° - \alpha$ можно считать образованными откладыванием угла α от первой оси; углы $90° \pm \alpha$, $270° \pm \alpha$ — откладыванием угла α от второй оси.

Мы уже вывели для произвольных углов α формулы (7):

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha. \quad (A)$$

Заменим в этих формулах α на $-\alpha$ и, значит, $90^\circ - \alpha$ $90^\circ + \alpha$. Мы получим:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\cos(90^\circ + \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Снова пользуясь произвольностью угла α, заменим здесь α на $90^\circ + \alpha$, а значит, $90^\circ + \alpha$ на $180^\circ + \alpha$; найдем следующую пару формул:

$$\sin(180^\circ + \alpha) = \sin[90^\circ + (90^\circ + \alpha)] = \\ = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha; \qquad (B_1)$$
$$\cos(180^\circ + \alpha) = \cos[90^\circ + (90^\circ + \alpha)] = \\ = -\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (C_1)$$

Далее:

$$\sin(270^\circ + \alpha) = \sin[90^\circ + (180^\circ + \alpha)] = \\ = \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha; \qquad (B_2)$$
$$\cos(270^\circ + \alpha) = \cos[90^\circ + (180^\circ + \alpha)] = \\ = -\sin(180^\circ + \alpha) = \sin\alpha. \qquad (C_2)$$

Из четырех последних формул, справедливых для любого α, заменой α на $-\alpha$ получаем следующие четыре формулы:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha; \qquad (B_3)$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha; \qquad (C_3)$$
$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha; \qquad (B_4)$$
$$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha. \qquad (C_4)$$

Наконец, поскольку значения одноименных тригонометрических функций углов, отличающихся на 360°, равны между собой, получаем:

$$\sin(360^\circ - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \qquad (B_5)$$
$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha. \qquad (C_5)$$

Теперь можно легко вывести формулы приведения для тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)} = \frac{1}{-\operatorname{ctg}\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)} = \frac{1}{-\operatorname{tg}\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Мы не указываем остальных формул приведения для тангенса и котангенса, поскольку значения этих функций не меняются от прибавления к аргументу 180°.

Нет необходимости запоминать каждую формулу приведения в отдельности, потому что они строятся по одному правилу.

Правило приведения. *В левой части каждой формулы приведения стоит «приводимая» функция* (т. е. тригонометрическая функция угла $\beta = 90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$, $360^\circ - \alpha$); *в правой части формулы стоит одноименная или сходственная функция угла α, снабженная знаком* + *или* — (знак + обыкновенно опускается).

Для углов $\beta = 180^\circ \pm \alpha$, $360^\circ - \alpha$, образованных откладыванием угла α от первой (горизонтальной) оси, в правой части стоит одноименная функция; для углов $\beta = 90^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$, образованных откладыванием угла α от второй (вертикальной) оси, стоит сходственная функция.

Остается указать лишь знак, который нужно брать перед «приведенной» функцией (т. е. в правой части формул). Формулы приведения, верные для всех углов α, верны, в частности, и для острых углов α. Но если угол α острый, то угол β есть угол вполне определенной четверти, что сразу указывает, какой знак имеет приводимая функция. Этот знак и ставится перед функцией в правой части формулы.

Примеры. Составим формулы приведения для: 1) $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)$; 2) $\cos(360^\circ - \alpha)$ прямо на основании указанного правила.

1) Угол $90^\circ + \alpha$ образован откладыванием угла α от второй (вертикальной) оси; поэтому в правой части формулы приведения должна быть сходственная функция, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha$ со знаком + или —. Если угол α острый, то угол $90^\circ + \alpha$ есть угол второй четверти и, значит, его тангенс отрицателен; следовательно:

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Эта формула справедлива для любых углов α.

2) Угол $360° - \alpha$ образован откладыванием угла α от первой (горизонтальной) оси; поэтому в правой части формулы приведения должна быть одноименная функция, т. е. $\cos\alpha$ со знаком $+$ или $-$. Если угол α острый, то угол $360° - \alpha$ есть угол четвертой четверти, в которой косинус положителен; следовательно:

$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha.$$

Эта формула также справедлива для любых углов α.

22. Приведение к острому углу. Формулы приведения позволяют выразить тригонометрические функции произвольного угла через тригонометрические функции острого угла (или, как говорят, привести к тригонометрическим функциям острого угла). В самом деле, тригонометрические функции произвольного угла β можно привести к тригонометрическим функциям неотрицательного угла β_1, меньшего $360°$ (п. 20). Далее, всякий угол β_1, больший $90°$, можно представить или так: $90° + \alpha$ или $180° - \alpha_1$ (вторая четверть), или так: $180° + \alpha$ или $270° - \alpha_1$ (третья четверть), или так: $270° + \alpha$ или $360° - \alpha_1$ (четвертая четверть), где α и α_1 — острые углы. Наконец, с помощью формул приведения можно выразить тригонометрические функции этого угла β_1 через тригонометрические функции острого угла α или α_1. Таким образом, тригонометрические функции угла β будут приведены к функциям острого угла.

Это дает возможность при помощи таблицы значений тригонометрических функций острых углов вычислять значения тригонометрических функций любых углов.

На стр. 14 приведена таблица значений тригонометрических функций для всех острых углов, выражающихся целым числом градусов (таблица через 1°).

Примеры.

1) $\sin 870° = \sin(2 \cdot 360° + 150°) = \sin 150° =$

$$= \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

2) $\cos 1180° = \cos(3 \cdot 360° + 100°) = \cos 100° =$

$$= \cos(90° + 10°) = -\sin 10°.$$

По таблице находим: $\sin 10° \approx 0{,}174$. Значит, $\cos 1180° \approx$ $\approx -0{,}174$.

3) $\sin(-850^\circ) = -\sin 850^\circ = -\sin(2\cdot 360^\circ + 130^\circ) =$
$= -\sin 130^\circ = -\sin(90^\circ + 40^\circ) =$
$= -\cos 40^\circ \approx -0{,}766,$

или

$\sin(-850^\circ) = \sin(-3\cdot 360^\circ + 230^\circ) = \sin 230^\circ =$
$= \sin(270^\circ - 40^\circ) = -\cos 40^\circ \approx -0{,}766.$

Задачи к главе I

1. Проверить, что треугольник с данными сторонами прямоугольный, и найти значения тригонометрических функций острых углов α и β:

(a) $a = 3,\ b = 4,\ c = 5;$
(b) $a = 8,\ b = 15,\ c = 17.$

2. По данным двум сторонам прямоугольного треугольника найти третью сторону и значения тригонометрических функций острых углов α и β:

(a) $a = 21,\ b = 20;$ (b) $a = 24,\ c = 25.$

3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 50 *см*. Синус одного из острых углов равен 0,28. Найти катеты.

4. Котангенс одного из острых углов прямоугольного треугольника равен $\frac{2}{5}$, меньший катет равен 10 *см*. Найти второй катет.

5. Найти сумму косинусов острых углов прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 20 *см*, а периметр равен 45 *см*.

6. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 12 *см*, гипотенуза равна 10 *см*. Найти произведение синусов острых углов треугольника.

7. Может ли синус острого угла быть равным:

(a) $\frac{4}{5}$; (b) $\frac{8}{7}$; (c) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; (d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; (e) $a + \frac{1}{a}$?

8. Может ли косинус острого угла быть равным:

(a) 0,947; (b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; (c) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$; (d) $\frac{1}{\sin 18^\circ}$?

9. Найти значение суммы $\sin\alpha + \cos\alpha$ при следующих значениях угла α:

(a) 30°; (b) 45°; (c) 60°.

10. Найти значение выражения $\cos 2\alpha - \cos\alpha$ при значении угла α, равном 30°.

11. Найти значение выражения $\frac{\sin(\alpha + 15^\circ) - \sin\alpha}{\sin 2\alpha}$ при значении угла α, равном 30°.

12. Найти произведение суммы синусов углов в 60° и 30° на косинус разности этих углов.

13. Найти $\sin 15°$.

Указание. К треугольнику ABC с углами $A = 15°$ и $C = 90°$ и стороной $AB = 1$ приложить равный ему треугольник ACD и найти сторону BD, пользуясь теоремой о квадрате стороны, лежащей против острого угла.

14. Найти $\cos 15°$ (см. Указание к предыдущей задаче).

15. Могут ли синус и косинус одного и того же острого угла быть равными соответственно:

(a) $\frac{7}{25}$ и $\frac{24}{25}$; (b) 0,6 и 0,8; (c) $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

16. Могут ли тангенс и котангенс одного и того же острого угла быть равными соответственно:

(a) 0,6 и $1\frac{2}{3}$; (b) $m+\frac{1}{m}$ и $\frac{m}{m^2+1}$; (c) $\sqrt{2}+1$ и $\sqrt{2}-1$?

17. Найти косинус, тангенс и котангенс острого угла α, если $\sin\alpha$ равен:

(a) $\frac{3}{5}$; (b) 0,28; (c) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; (d) $\frac{p}{q}$, причем $p > 0$.

18. Найти синус, косинус и котангенс острого угла α, если $\operatorname{tg}\alpha$ равен:

(a) $\frac{1}{2}$; (b) $\sqrt{2}$; (c) $\frac{a^4-1}{2a^2}$.

19. Из формулы $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ выразить $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

20. Проверить справедливость равенства

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

при следующих значениях угла α: 30°, 45° и 60°. Будет ли это равенство справедливым при любых значениях острого угла α?

21. Проверить справедливость равенства

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

при следующих значениях угла α: 30°, 45° и 60°. Можно ли назвать это равенство тригонометрическим тождеством?

Доказать тождества (задачи 22—29):

22. $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

23. $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

24. $\frac{1}{\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha} = \cos^2\alpha$.

25. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$.

26. $\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha}$.

27. $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha.$

28. $\cos^2\alpha(\operatorname{tg}\alpha+2)(2\operatorname{tg}\alpha+1)-5\sin\alpha\cos\alpha=2.$

29. $\cos\alpha+\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}.$

Упростить выражения (задачи 30—37):

30. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2.$

31. $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha.$

32. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha.$ **33.** $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2.$

34. $\sin\alpha\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha).$

35. $\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\right).$ **36.** $\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha.$

37. $\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}-\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right).$

38. Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}2$. Найти произведение $\sin\alpha\cos\alpha$.

39. Заменить синусом дополнительного угла:
(a) $\cos 52°$; (b) $\cos 18°$; (c) $\cos(60°-\alpha)$; (d) $\cos(\alpha-20°)$.

40. Заменить косинусом дополнительного угла:
(a) $\sin 48°$; (b) $\sin(45°+\alpha)$; (c) $\sin(30°-2\alpha)$; (d) $\sin\frac{60°-\alpha}{2}$.

41. Заменить тангенсом дополнительного угла:
(a) $\operatorname{ctg}72°$; (b) $\operatorname{ctg}(45°+\alpha)$; (c) $\operatorname{ctg}\left(90°-\frac{\alpha}{4}\right)$.

42. Заменить котангенсом дополнительного угла:
(a) $\operatorname{tg}38°$; (b) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; (c) $\operatorname{tg}(30°-2\alpha)$; (d) $\operatorname{tg}\frac{\alpha-25°}{2}$.

43. Зная $\sin 15°$ и $\cos 15°$ (см. задачи 13 и 14), найти $\sin 75°$ и $\cos 75°$.

44. Проверить справедливость равенств:

(a) $\sin 35°30'=\cos 54°30'$;

(b) $\sin(30°-\alpha)=\cos(60°+\alpha)$;

(c) $\cos(2\alpha+14°)=\sin(76°-2\alpha)$;

(d) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}+55°\right)=\sin\left(35°-\frac{\alpha}{2}\right)$;

(e) $\operatorname{tg}\left(66°-\frac{\alpha}{3}\right)=\operatorname{ctg}\left(24°+\frac{\alpha}{3}\right)$.

45. Сумма тангенсов двух дополнительных углов равна 3. Найти сумму квадратов тангенсов этих углов.

---

46. Построить на миллиметровой бумаге с помощью транспортира углы в 10°, 20°, 30°, 40° и 45° и измерением соответствующих отрезков найти значения тригонометрических функций этих углов. Сравнить с таблицей.

47. По таблице значений тригонометрических функций найти:

(a) $\sin 32°$; (b) $\sin 44°$; (c) $\cos 18°$; (d) $\operatorname{tg} 27°$; (e) $\operatorname{tg} 5°$; (f) $\operatorname{ctg} 12°$; (g) $\operatorname{ctg} 45°$.

48. Найти по таблице:

(a) $\cos 75°$; (b) $\operatorname{tg} 48°$; (c) $\sin 68°$; (d) $\operatorname{ctg} 81°$; (e) $\cos 67°$; (f) $\sin 60°$.

49. По таблице убедиться в том, что с увеличением острого угла вдвое его синус увеличивается менее чем вдвое. Взять, например, следующие углы: 20°, 35° и 42°.

50. Проверить по таблице справедливость неравенства $\sin 3\alpha < 3 \sin \alpha$ для следующих значений угла α: 14°, 20° и 25°.

51. Проверить по таблице справедливость неравенства $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) < \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$ для следующих значений углов α и β:

23° и 15°, 36° и 28°, 19° и 26°.

52. Найти по таблице острый угол α, если:

(a) $\sin \alpha = 0{,}559$; (b) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}424$;
(c) $\cos \alpha = 0{,}978$; (d) $\operatorname{ctg} \alpha = 2{,}05$;
(e) $\sin \alpha = 0{,}616$; (f) $\cos \alpha = 0{,}777$.

53. Найти по таблице острый угол α, если:

(a) $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}28$; (b) $\operatorname{ctg} \alpha = 1{,}881$; (c) $\sin \alpha = 0{,}906$;
(d) $\cos \alpha = 0{,}94$; (e) $\sin \alpha = 0{,}707$; (f) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}510$;
(g) $\cos \alpha = 0{,}191$; (h) $\operatorname{ctg} \alpha = 5{,}145$.

54. Найти по таблице острый угол α [1]), если:

(a) $\sin \alpha = 0{,}394$; (b) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}580$; (c) $\cos \alpha = 0{,}9$;
(d) $\operatorname{tg} \alpha = 2$; (e) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{3}$.

55. Найти по таблице острый угол α, если:

(a) $\sin \alpha = \sqrt{2} - 1$; (b) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$;

(c) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$; (d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

56. Найти, пользуясь таблицей, значения выражения

$$\sqrt[3]{\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha}}$$

при следующих значениях угла α: (a) 32°; (b) 55°.

Указание. Предварительно выражение упростить.

---

[1]) В задачах 54—55 угол находится по таблице с точностью до $^1/_2$°.

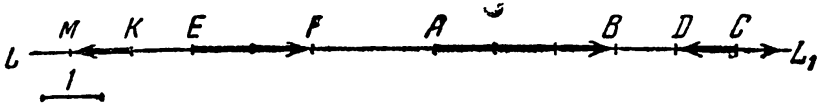
57. Найти, пользуясь таблицей, значения выражения

$$\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)^2$$

при следующих значениях угла α: (a) 45°; (b) 48° (см. указание к задаче 56).

---

58. На оси LL_1 (черт. 21) даны отрезки AB, CD, EF и KM. Найти алгебраическую величину и длину каждого из этих отрезков оси.



Черт. 21.

59. Чему равна сумма алгебраических величин отрезков AB и BA оси LL_1 и сумма их длин, если $|AB|=2$?

60. Построить на оси LL_1 отрезки $AB=4$, $BC=-5$ и $CD=3$. Найти AD.

61. Найти сумму проекций векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ — трех сторон параллелограмма $ABCD$ — на четвертую сторону AD, если $|AD|=c$.

62. Найти сумму проекций векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ — сторон ромба $ABCD$ — на диагональ AC, если $|\overline{AC}|=d$.

---

63. Углом какой четверти является угол, равный:

(a) 72°; (b) 325°; (c) 164°; (d) 200°; (e) 92°; (f) 268°?

64. Если рассматривать только положительные углы, меньшие чем 360°, то углом какой четверти является угол, равный:

(a) половине угла второй четверти;
(b) половине угла третьей четверти;
(c) одной трети угла четвертой четверти;
(d) одной четверти угла четвертой четверти.

65. Найти в градусной мере угол поворота махового колеса, сделавшего:

(a) 4 полных оборота; (b) 2 оборота; (c) 3,1 оборота; (d) $\frac{7}{8}$ оборота.

66. Найти и построить с помощью транспортира угол

$$\beta=360^\circ\cdot n+\alpha$$

при следующих значениях n и α:

(a) $n=3$, $\alpha=40^\circ$; (b) $n=1$, $\alpha=240^\circ$; (c) $n=2$, $\alpha=30^\circ$.

67. Вектор $\overline{AB}$, занимавший горизонтальное положение, повернулся вокруг точки A против часовой стрелки на угол β. Построить начальное и конечное положение вектора $\overline{AB}$, если угол β равен: (a) 210°; (b) 765°; (c) 1200°; (d) 540°.

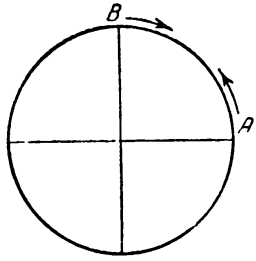
68. Две точки A и B, находясь на противоположных концах диаметра окружности, начинают одновременно двигаться по окружности в одном направлении. Точка A каждую минуту описывает дугу в 30°, точка B — дугу в 45°. Через сколько минут после начала движения произойдет 1-е, 4-е и n-е совпадение точек?

69. Углом какой четверти является угол, равный:

(a) $-60°$; (b) $-240°$; (c) $-150°$; (d) $-260°$.

70. Представить угол β в виде $\beta = 360° \cdot n + \alpha$, где n — любое целое число или нуль, а α — неотрицательный угол, меньший 360°, если

(a) $\beta = -180°$; (b) $\beta = -780°$; (c) $\beta = -1510°$;
(d) $\beta = 2000°$; (e) $\beta = 1080°$; (f) $\beta = -490°$;
(g) $\beta = -540°$; (h) $\beta = -1800°$; (i) $\beta = 350°$.



Черт. 22.

71. Две точки A и B, находящиеся на концах взаимно перпендикулярных диаметров окружности (черт. 22), начинают одновременно двигаться по окружности: точка A — в положительном направлении, описывая каждую минуту дугу в 20°, а точка B — в отрицательном направлении, описывая каждую минуту дугу в 10°. Через сколько минут произойдет 1-е, 3-е и n-е совпадение точек?

72. Какое время показывают стрелки часов в моменты их совмещения?

---

73. Найти значения тригонометрических функций угла, равного:
(a) 135°; (b) 150°; (c) 225°; (d) 300°; (e) $-240°$.

74. Найти значения тригонометрических функций угла, равного

(a) 450°; (b) 600°;
(c) 840°; (d) $-420°$;
(e) $-750°$; (f) $-1110°$.

75. Вектор $\overline{AB}$, длина которого равна c, образует с осью LL_1 угол α. Найти проекцию этого вектора на данную ось, если:

(a) $c = 18$, $\alpha = 60°$; (b) $c = 23{,}5$, $\alpha = 90°$;
(c) $c = 20$, $\alpha = 135°$; (d) $c = 1{,}5$, $\alpha = 180°$.

76. Найти длину вектора $\overline{AB}$, зная проекцию a этого вектора на ось LL_1 и угол α между вектором и данной осью:

(a) $a = 2$, $\alpha = 30°$; (b) $a = 0{,}75$, $\alpha = 0°$.
(c) $a = -1$, $\alpha = 120°$; (d) $a = -6$, $\alpha = 180°$.

77. На прямолинейно движущееся тело действует сила F, образующая с направлением движения угол α. Найти проекцию этой силы на

(a) $F = 8$ *кГ*, $\alpha = 45°$; (b) $F = 28$ *кГ*, $\alpha = 135°$;
(c) $F = 10$ *кГ*, $\alpha = 150°$; (d) $F = 17$ *кГ*; $\alpha = 0°$

78. С помощью теорем о проекциях доказать, что

$$\cos 144° + \cos 72° = -\frac{1}{2}.$$

Указание. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ спроектирована AE замкнутую ломаную $FEDCF$, где F — середина AE.

79. Найти знаки следующих значений тригонометрических функ-

(a) $\sin 102°$; (b) $\cos 212°$; (c) $\operatorname{tg} 168°$ (d) $\operatorname{ctg} 310°$; (e) $\sin 200°$;
(f) $\operatorname{tg} 105°$; (g) $\operatorname{ctg} 220°$; (h) $\cos 160°$; (i) $\operatorname{tg} 350°$; (k) $\operatorname{ctg} 93°$.

80. Углом какой четверти является угол,

(a) синус которого положителен, а косинус отрицателен?
(b) тангенс которого отрицателен, а косинус положителен?
(c) котангенс которого отрицателен и синус отрицателен?

81. Вычислить:

(a) $3 \sin 90° + 2 \cos 0° - 3 \sin 270°$;

(b) $2 \cos 270° - \frac{1}{2} \operatorname{tg} 180° + \sin 90°$;

(c) $\operatorname{tg} 180° - \frac{3}{4} \sin 270° - \frac{1}{4} \cos 180°$.

82. Найти значения выражения

$$\sin(\alpha + 45°) + 2 \sin(\alpha - 45°) + 4 \cos 2\alpha + 2 \cos(\alpha + 135°);$$

если угол α имеет следующие значения: 45° и 135°.

83. Найти значения выражения

$$2 \sin \alpha + \cos 2\alpha - 3 \sin 3\alpha - 4 \cos 6\alpha,$$

угол α равен: 0°, 30° и 45°.

Упростить выражения (задачи 84—85):

84. $$\frac{x^2 \sin^2 90° - y^2 \cos^2 0°}{x \cos 180° - y \sin 270° + xy \operatorname{tg} 180°}.$$

85. $$\frac{(a \sin 90°)^3 - a^2b^2 \operatorname{tg} 0° + ab^2 \operatorname{ctg} 90° + (b \cos 180°)^3}{(a \cos 180°)^2 + ab \sin 270° \cos 180° + (b \sin 270°)^2}.$$

86. Построить синус и косинус угла, равного:

(a) 110°; (b) 255°; (c) 320°;
(d) 210°; (e) — 160°; (f) 530°.

87. Построить тангенс и котангенс угла, равного:

(a) $-70°$; (b) $130°$; (c) $-20°$;
(d) $215°$; (e) $-345°$; (f) $-870°$.

88. Найти все значения угла α, если:

(a) $\sin\alpha = 0$; (b) $\sin\alpha = 1$; (c) $\cos\alpha = 0$; d) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$.

По данному значению одной тригонометрической функции найти значения всех остальных функций того же угла (задачи 89-

89. $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$, где $270° < \alpha < 360°$.

90. $\cos\alpha = \frac{9}{41}$, где $0° < \alpha < 90°$.

91. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, где $90° < \alpha < 180°$.

92. $\operatorname{ctg}\alpha = 1$, где $180° < \alpha < 270°$.

93. $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$, где $180° < \alpha < 270°$.

94. $\operatorname{ctg}\alpha = 2$, где $180° < \alpha < 360°$.

95. Выразить все тригонометрические функции угла α через его тангенс.

96. Зная, что $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\cos\alpha > 0$, найти значения всех тригонометрических функций угла α.

97. Найти значение выражения $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$, если $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ и $90° < \alpha < 180°$.

98. Найти значение выражения $\frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

99. Найти значение выражения $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$, если $\cos\alpha = -0{,}4$.

Доказать тождества (задачи 100 — 103):

100. $\cos\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha) = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$.

101. $\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right) : (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha - 1) = \sin\alpha + \cos\alpha$.

102. $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha - (1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2 = 4\operatorname{tg}^2\alpha$.

103. $2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) + (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha - 1$.

Упростить выражения (задачи 104—108):

104. (a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$; (b) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$.

105. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$.

106. $\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} - \frac{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}$.

107. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}$.

108.

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)}}+\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)}}\right].$$

109. Найти:

(a) $\sin(-30°)$; (b) $\operatorname{tg}(-45°)$; (c) $\sin(-60°)$; (d) $\operatorname{ctg}(-135°)$.

110. Найти:

(a) $\sin(-90°)$; (b) $\cos(-180°)$; (c) $\operatorname{ctg}(-270°)$; (d) $\sin(-270°)$.

111. Пользуясь таблицей, найти:

(a) $\operatorname{tg}(-48°)$; (b) $\cos(-32°)$; (c) $\sin(-72°)$; (d) $\operatorname{ctg}(-11°)$.

Пользуясь таблицей, найти значения выражений (задачи 112—114):

112. $\sin^2\alpha+\sin 2\alpha$ при $\alpha=-13°$.

113. $\cos^3\alpha+\sin^3\alpha$ при $\alpha=-45°$.

114. $\sin(\alpha-20°)+\cos(\alpha-10°)$ при $\alpha=0°$.

Упростить выражения (задачи 115—118):

115. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)-\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\alpha)}$. **116.** $\dfrac{\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)-\operatorname{tg}(\beta-2\alpha)}{\operatorname{ctg}(\beta-2\alpha)-\operatorname{ctg}(2\alpha-\beta)}$.

117. $\dfrac{\sin^2(\alpha+45°)}{\cos(\alpha-45°)\cos(45°-\alpha)}$. **118.** $\dfrac{\cos^3(-\alpha)+\sin^3(-\alpha)}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}$.

---

119. Привести к тригонометрическим функциям положительного угла, меньшего чем 180°:

(a) $\operatorname{tg}(-520°)$; (b) $\sin(-710°)$, (c) $\cos(-525°)$;
(d) $\operatorname{ctg}(-740°)$; (e) $\sin(-100°)$; (f) $\operatorname{tg}(-130°)$.

120. Найти:

(a) $\sin 540°$; (b) $\operatorname{tg} 720°$; (c) $\cos 450°$; (d) $\operatorname{ctg} 450°$;
(e) $\cos 900°$; (f) $\sin 810°$.

121. Найти:

(a) $\operatorname{tg}(-900°)$; (b) $\sin(-450°)$; (c) $\cos(-630°)$; (d) $\operatorname{ctg}(-810°)$.

122. Пользуясь формулами приведения, найти:

(a) $\sin 210°$; (b) $\cos 240°$; (c) $\operatorname{tg} 315°$; (d) $\cos 570°$;
(e) $\operatorname{ctg} 480°$; (f) $\cos(-330°)$; (g) $\sin(-225°)$.

123. Тангенс внешнего угла прямоугольного треугольника, не смежного с прямым углом, равен k. Найти тангенсы острых углов треугольника.

124. Косинус одного из смежных углов равен $-\frac{3}{5}$. Найти синус второго смежного угла.

125. Найти $\operatorname{tg}(270° - \alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$.

126. Найти $\sin(180° + \alpha)$, если $\cos\alpha = \frac{63}{65}$ и $0° < \alpha < 90°$.

127. Найти $\cos(360° - \alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{9}{40}$ и $90° < \alpha < 180°$.

128. Найти $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$, если $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ и $270° < \alpha < 360°$.

129. Привести к тригонометрическим функциям положительнс угла, меньшего чем 45°:

(a) $\operatorname{tg} 995°$; (b) $\cos(-1544°)$; (c) $\sin 916°$; (d) $\operatorname{ctg} 400°$;

(e) $\sin 850°$; (f) $\cos 700°$; (g) $\operatorname{tg}(-385°)$; (h) $\sin(-288°)$;

(i) $\operatorname{tg}(-325°)$; (k) $\sin(-610°)$; (l) $\operatorname{ctg}(-508°)$, (m) $\cos 1020°$

130. Пользуясь таблицей, найти следующие значения тригоно трических функций:

(a) $\cos 520°$; (b) $\operatorname{tg}(-148°)$; (c) $\sin(-160°)$; (d) $\cos(-202°)$;

(e) $\operatorname{ctg} 170°$; (f) $\operatorname{tg}(-147°)$; (g) $\cos 870°$; (h) $\sin(-1000°)$.

131. Пользуясь таблицей, найти значения выражения

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha,$$

если угол α имеет следующие значения: 35°, 69°, 100° и 120°.

132. По таблице найти угол α, если

(a) $\sin\alpha = -0{,}515$ и $180° < \alpha < 270°$;

(b) $\sin\alpha = 0{,}669$ и $90° < \alpha < 180°$;

(c) $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}376$ и $90° < \alpha < 180°$;

(d) $\cos\alpha = 0{,}407$ и $270° < \alpha < 360°$;

(e) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}577$ и $180° < \alpha < 270°$;

(f) $\operatorname{ctg}\alpha = -2{,}747$ и $90° < \alpha < 180°$.

133. По таблице найти положительный угол α, меньший чем 36 если:

(a) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}344$ и $\sin\alpha > 0$;

(b) $\sin\alpha = 0{,}616$ и $\cos\alpha < 0$;

(c) $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}072$ и $\sin\alpha < 0$.

134. Построить угол α, если:

$\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $90° < \alpha < 180°$;

$\cos\alpha = -\frac{2}{5}$ и $180° < \alpha < 270°$;

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$ и $90° < \alpha < 180°$;

$\operatorname{ctg}\alpha = -2$ и $\sin\alpha < 0$.

135. Проверить, что $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ имеют одинаковые знаки при любых значениях угла α (при которых $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ существует). Рассмотреть отдельно случаи:

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ, \qquad 180^\circ < \alpha < 360^\circ,$$
$$360^\circ < \alpha < 540^\circ \quad \text{и} \quad 540^\circ < \alpha < 720^\circ.$$

136. Проверить, что $\sin\alpha$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ имеют одинаковые знаки при всех значениях угла α, заключенных между 0° и 360°. Рассмотреть отдельно случаи: $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ и $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Сохранится ли это свойство при значениях угла α, заключенных между 360° и 540°?

Упростить выражения (задачи 137—144):

137.
$$[\sin(180^\circ + \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha)]^2 + [\cos(360^\circ - \alpha) - \sin(270^\circ - \alpha)]^2.$$

138. $$\frac{\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) - \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)\sin(360^\circ - \alpha)[\sin(180^\circ + \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha)]}.$$

139. $$\frac{\operatorname{ctg}228^\circ \operatorname{ctg}222^\circ + \sin155^\circ \cos245^\circ}{\operatorname{ctg}73^\circ \operatorname{ctg}197^\circ + \operatorname{tg}155^\circ \operatorname{ctg}335^\circ}.$$

140. $$\frac{\cos^2 336^\circ - \cos^2 156^\circ + \operatorname{tg}100^\circ \operatorname{tg}350^\circ}{\operatorname{tg}^2 72^\circ + \operatorname{ctg}^2 162^\circ}.$$

141. $$\frac{\operatorname{ctg}(\alpha - 90^\circ)[\sin(\alpha - 270^\circ) - \sin(180^\circ - \alpha)]}{\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)[\cos(\alpha + 360^\circ) + \sin(\alpha - 360^\circ)]}.$$

142. $$\frac{\sin^2(-212^\circ)\cos302^\circ + \cos^3(-148^\circ)}{\sin(-82^\circ)\cos(-8^\circ) + \sin368^\circ \sin(-172^\circ) - \sin58^\circ \sin148^\circ}.$$

143. $$\frac{\sin^2(\alpha - 180^\circ) - \cos^3(270^\circ - \alpha)\sin(180^\circ + \alpha)}{\operatorname{tg}^2(90^\circ - \alpha)\cos^2(\alpha - 270^\circ)\sin^2(\alpha - 90^\circ)}.$$

144. $$\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)\operatorname{ctg}^2(\alpha - 180^\circ) - \operatorname{tg}^3(\alpha - 360^\circ)\operatorname{tg}^2(270^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha - 90^\circ)[\sin^2(\alpha - 270^\circ) + \sin^2(270^\circ + \alpha)]}.$$

145. Доказать тождества:

(a) $\sin(\alpha - 30^\circ) + \sin(\alpha + 150^\circ) = 0;$

(b) $\cos(\alpha + 100^\circ) = -\sin(170^\circ - \alpha),$

146. Показать, что при n целом справедливо равенство

$$\cos\left(\frac{1}{n}\cdot 180^\circ\right) + \cos\left(\frac{2}{n}\cdot 180^\circ\right) + \ldots + \cos\left(\frac{n-1}{n}\cdot 180^\circ\right) = 0.$$

ГЛАВА ВТОРАЯ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

§ 7. Тригонометрические функции числового аргумента и их периодичность

23. Радианное измерение дуг и углов. До сих пор мы пользовались градусной мерой дуг и углов, в которой за единицу измерения дуги (угла) принимается $\frac{1}{360}$ часть окружности $\left(\frac{1}{360}\right.$ часть полного оборота$\left.\right)$. В теоретических рассуждениях, однако, предпочтительнее другая система измерения — так называемая «радианная».

В радианной системе измерения единицей дуги окружности служит дуга, длина которой равна радиусу окружности. Такая дуга называется *радианом. Радианной мерой* данной дуги называется число радианов, заключенных в этой дуге. Это значит, что радианная мера α дуги равна отношению ее длины l к радиусу R окружности:

$$\alpha = \frac{l}{R}. \qquad (1)$$

Радианная мера дуги, соответствующей некоторому центральному углу, зависит только от этого угла, но не зависит от радиуса окружности.

В самом деле, длины l и l_1 двух дуг, соответствующих одному и тому же центральному углу, как известно из геометрии, пропорциональны их радиусам R и R_1:

$$\frac{l}{R} = \frac{l_1}{R_1},$$

т. е. радианные меры обеих дуг одни и те же.

Из формулы (1) следует:

$$l = \alpha R, \qquad (2)$$

т. е. *длина дуги равна длине радиуса, умноженной на радианную меру дуги;* в частности, для дуги единичной окружности ($R = 1$) *длина дуги равна ее радианной мере.* Вот это обстоятельство и делает особенно удобной радианную систему измерения.

Радианная мера угла равна радианной мере такой дуги, для которой этот угол является центральным.

Единицей при радианном измерении углов служит, следовательно, центральный угол, соответствующий дуге в один радиан. Такой угол также называется *радианом.*

Радианная мера полной окружности или полного оборота (360°) равна $2\pi = 6{,}28...$ радиана; радианная мера полуокружности или развернутого угла (180°) равна $\pi = 3{,}14...$ радиана; для четверти окружности или прямого угла (90°) она равна $\frac{\pi}{2} = 1{,}57...$ радиана и т. д.

Следует запомнить еще радианную меру следующих углов (дуг):

$$30° = \frac{\pi}{6} \text{ рад.}; \qquad 45° = \frac{\pi}{4} \text{ рад.};$$

$$60° = \frac{\pi}{3} \text{ рад.}; \qquad 270° = 3 \cdot \frac{\pi}{2} \text{ рад.}$$

При измерении углов и дуг радианами наименование единицы измерения — радиана — обычно опускают. Говорят, например: «угол равен $\frac{\pi}{2}$» вместо «угол равен $\frac{\pi}{2}$ радиана»; «угол равен 1,4» вместо «угол равен 1,4 радиана».

Легко перейти от радианной меры к градусной и обратно.

Так как $\pi = 3{,}14159...$ радиана соответствует 180°, то 1 радиан $= \frac{180}{\pi}$ градуса $= \frac{180}{3{,}14159}$ градуса $\approx 57°17'44'',8$, 1 градус $= \frac{\pi}{180}$ радиана $\approx 0{,}01745$ радиана; α радианов $= \frac{180\alpha}{\pi}$ градуса $\approx \alpha \cdot 57°17'44'',8$; β градусов $= \frac{\pi\beta}{180}$ радиана $\approx 0{,}01745\,\beta$ радиана.

Аргумент тригонометрических функций (угол или дугу) можно теперь рассматривать заданным в радианной мере. Например: $\sin \frac{1}{2}$ рад. $= \sin \frac{1}{2} \approx \sin 28°38'52'',4$.

24. Определение тригонометрических функций числового аргумента. Одна и та же математическая функция может выражать зависимости между разными физическими величинами. Например, квадратичная функция $y = x^2$ устанавливает зависимость между площадью квадрата y и длиной его стороны x. Значит, x выражает длину, а y — площадь. Название функции $y = x^2$ — «квадратичная» — указывает на ее связь с задачей измерения площади квадрата. Однако квадратичная функция появляется и в иных случаях, когда она выражает зависимость не между длиной и площадью, а между другими величинами. Например, расстояние y, проходимое свободно падающим телом в пустоте, является квадратичной функцией $\left(\text{с коэффициентом } \frac{g}{2}\right)$ времени падения x. Вот эта функция:

$$y = \frac{g}{2} x^2.$$

Поэтому в математике рассматривают квадратичную функцию как функцию числовой переменной величины x, которая может выражать различные физические величины.

Дело обстоит так же и с тригонометрическими функциями. Сначала они определяются как функции угла, а затем им придается более широкий смысл функций числового аргумента.

Многие вопросы математики, физики и других наук приводят к тригонометрическим функциям, аргументы которых выражают различные физические величины (длину, время, температуру и т. п.).

Пусть дано число x. Под значением функции $y = \sin x$, где x — некоторое число, понимают значение синуса угла в x радианов.

Пример. $\sin 2{,}705 = \sin 2{,}705$ рад. Так как $2{,}705$ рад. $\approx$ $\approx 155°$, то $\sin 2{,}705 \approx \sin 155° = \sin 25° \approx 0{,}423$ (см. таблицу на стр. 14).

Аналогично определяются функции $y = \cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ числового аргумента x.

Определение. *Тригонометрические функции числового аргумента x — это одноименные тригонометрические функции угла в x радианов.*

Дадим теперь в качестве иллюстрации небольшую часть таблицы значений тригонометрических функций числового аргумента x (с точностью до 0,0001) для значений x, заключенных между $x = 0$ и $x = 1{,}57\ldots$, взятых через 0,1.

x	Соответствующее число градусов	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0,0	0,00	0,0000	1,0000	0,000
0,1	5,44	0,0998	0,9950	0,103
0,2	11,28	0,1987	0,9801	0,2027
0,3	17,11	0,2955	0,9553	0,3093
0,4	22,55	0,3894	0,9211	0,4228
0,5	28,39	0,4794	0,8776	0,5463
0,6	34,23	0,5646	0,8253	0,6841
0,7	40,06	0,6442	0,7648	0,8423
0,8	45,50	0,7171	0,6967	1,0296
0,9	51,34	0,7833	0,6216	1,2602
1,0	57,18	0,8415	0,5403	1,5574
1,1	63,02	0,8912	0,4536	1,9648
1,2	68,45	0,9320	0,3624	2,5722
1,3	74,29	0,9636	0,2675	3,6021
1,4	80,13	0,9854	0,1700	5,7979
1,5	85,57	0,9975	0,0707	14,1014
1,57	89,95	1,0000	0,0008	1255,766

Эта таблица позволяет в некоторой мере судить о ходе зменения тригонометрических функций в связи с изменением ргумента. Читатель, например, обратит внимание на быстрое эзрастание $\operatorname{tg} x$ при приближении x к $\frac{\pi}{2} = 1{,}5707 \ldots$

25. Периодичность тригонометрических функций. Харакерным свойством тригонометрических функций является их ериодичность.

Определение. *Функция, вообще, называется периоической, если существует число, отличное от нуля, приавление которого к произвольному значению ее аргумента е меняет значения функции.*

Наименьшее положительное число, прибавление котоого к любому значению аргумента не меняет значения ункции, называется периодом функции [1]).

Теорема. *Период функций* $\sin x$ *и* $\cos x$ *равен* 2π, *а ериод функций* $\operatorname{tg} x$ *и* $\operatorname{ctg} x$ *равен* π.

Доказательство. Полученные раньше (см. стр. 27 33) формулы (20) и (21) гл. I можно записать в радианной

[1]) Иногда всякое число такого рода называют периодом функции, наименьшее положительное из них — *основным периодом.*

мере так:

$$\sin(x+n\cdot 2\pi)=\sin x; \quad \cos(x+n\cdot 2\pi)=\cos x, \qquad (3)$$

$$\operatorname{tg}(x+n\cdot\pi)=\operatorname{tg} x; \quad \operatorname{ctg}(x+n\cdot\pi)=\operatorname{ctg} x, \qquad (4)$$

где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Формула (3) показывает, что от прибавления чисел $n\cdot 2\pi$ к любому значению аргумента значения функций $\sin x$ и $\cos x$ не меняются.

Нам остается показать, что других чисел, обладающих этим свойством, не существует. В самом деле, пусть таким свойством для $\sin x$ обладает число h, т. е.

$$\sin(x+h)=\sin x,$$

при любом x. Значит, в частности, это равенство справедливо при $x=\frac{\pi}{2}$, т. е. должно быть

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1;$$

по формуле приведения (В) гл. I (см. стр. 40) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=\cos h$, и потому

$$\cos h=1.$$

Но косинус может равняться 1, как это мы видели в п. 15, лишь при $h=n\cdot 2\pi$, ч. т. д.

Пусть, далее,

$$\cos(x+h)=\cos x$$

при любом x. Тогда, полагая $x=0$, получим:

$$\cos h=\cos 0=1$$

и снова заключаем, что $h=n\cdot 2\pi$.

Наименьшим положительным числом среди всех чисел вида $n\cdot 2\pi$ является число 2π; значит, оно и служит периодом для $\sin x$ и $\cos x$, что мы и хотели показать.

Аналогично доказывается и вторая часть теоремы. Формула (4) показывает, что от прибавления чисел $n\pi$ к любому значению аргумента значения функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ не меняются. Покажем, что других чисел, обладающих этим свойством, не существует. Пусть таким свойством для $\operatorname{tg} x$ обла-

$$\operatorname{tg}(x+h)=\operatorname{tg} x$$

при любом x, для которого и $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg}(x+h)$ существуют.

Значит, в частности, при $x=0$ должно быть

$$\operatorname{tg} h=\operatorname{tg} 0=0,$$

а это может быть тогда и только тогда, когда $h=n\pi$ (см. п. 15). Далее, если $\operatorname{ctg} x$ не меняется от прибавления к любому x некоторого числа h, то не меняется и $\operatorname{tg} x=\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ и, следовательно, как только что было доказано,

$$h=n\pi.$$

Наименьшим положительным числом среди всех чисел вида $n\pi$ является число π; значит, оно и служит периодом для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, ч. т. д.

Можно указать и другие числа, прибавление которых к аргументу не меняет некоторых значений, например синуса; прибавление такого числа к одному значению аргумента не меняет значения синуса, прибавление же к другому — меняет. Такие числа не являются периодами функции.

Пример. $\sin 0=\sin\pi=0$, но уже $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=$ $=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$, в то время как $\sin\frac{\pi}{2}=1$; следовательно, π не есть период функции $\sin x$.

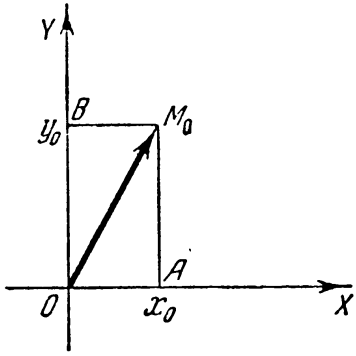
§ 8. Графики тригонометрических функций

26. График функции. Существует простой способ для наглядного представления заданной функциональной зависимости.

Возьмем две взаимно перпендикулярные оси OX и OY (черт. 23). За ось OX на чертеже обычно принимают горизонтальную ось, направленную слева направо,— она называется *осью иксов* или *осью абсцисс;* ось OY — вертикальная — направлена снизу вверх, она называется *осью игреков* или *осью ординат*. Точка O пересечения осей OX и OY называется *началом координат*. Будем откладывать в выбранном масштабе значения независимой переменной x на оси OX, а соответствующие значения y — в том же или другом масштабе на оси OY. В соответствии с указанными направлениями на

осях положительные числа по оси OX изображаются отрезками, отложенными вправо от точки O, отрицательные числа — влево от нее, а по оси OY положительные числа изображаются отрезками, отложенными вверх, отрицательные — вниз от точки O.

Пусть задана функция y независимой переменной x. Дадим x какое-нибудь значение x_0 и изобразим число x_0 отрезком OA на оси OX (черт. 23). Соответствующее значение функции y_0 изобразим отрезком OB на оси OY. Из концов A и B полученных отрезков проведем прямые, параллельные осям OX и OY; точка их пересечения M_0 изобразит совместные значения независимой переменной и функции. В самом деле, расстояние точки M_0 (взятое с соответствующим знаком) от оси OY является значением аргумента (x_0), а ее же расстояние от оси OX (также взятое со знаком) является значением функции (y_0), соответствующим значению x_0.



Черт. 23.

Числа x_0 и y_0, определяющие положение точки M_0, называются ее *координатами;* при этом число x_0 называется *абсциссой* точки M_0, а y_0 — ее *ординатой* [1]); записываем это так: $M_0(x_0, y_0)$, на первом месте обычно указывается абсцисса, а на втором — ордината точки. Вся система осей OX и OY с принятыми на них направлениями и масштабами называется *системой координат.*

Вместо откладывания ординаты по оси OY можно восставить перпендикуляр AM_0 в точке A к оси OX, длина которого равна абсолютной величине y_0; его направление выбираем вверх от оси OX, если $y_0 > 0$, и вниз от нее, если $y_0 < 0$.

Допустим теперь, что нам удалось построить точки, изображающие совместные значения независимой переменной и функции для всех возможных значений независимой переменной. Тогда точки M, отмеченные на плоскости, образуют, вообще говоря, некоторую кривую линию (черт. 24), которая называется *графиком* рассматриваемой функции. В действи-

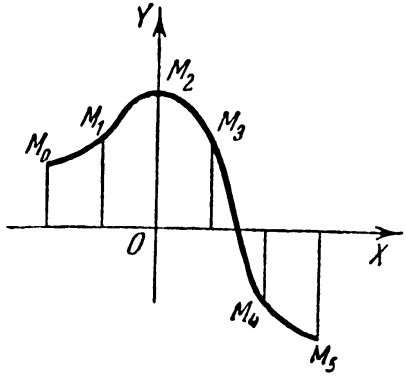
---

[1]) Абсцисса и ордината точки M_0 суть проекции вектора $\overrightarrow{OM_0}$ на оси OX и OY (черт. 23).

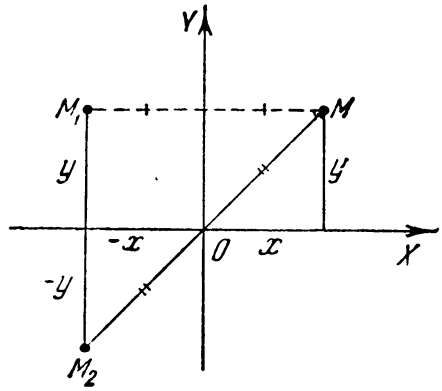
тельности обычно невозможно построить все точки графика. Но чем больше точек построено, тем более точным будет график, полученный проведением через эти точки сплошной линии.

Определение. *Графиком функции называется линия — геометрическое место точек $M(x, y)$, абсциссы x которых равны значениям независимой переменной, а ординаты y — соответствующим значениям функции.*

График является геометрическим образом функции. Наблюдая за изменением ординаты точки графика



Черт. 24.



Черт. 25.

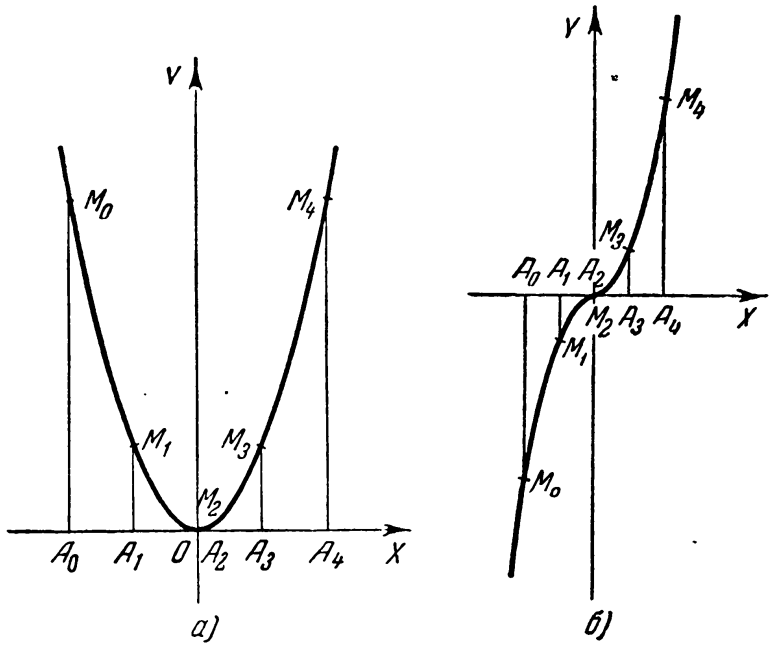
функции при изменении ее абсциссы, мы получаем возможность отчетливо видеть, как изменяется функция с изменением независимой переменной.

Посмотрим, какими особенностями характеризуется график четной и нечетной функций, а также периодической функции.

График четной функции симметричен относительно оси OY; график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

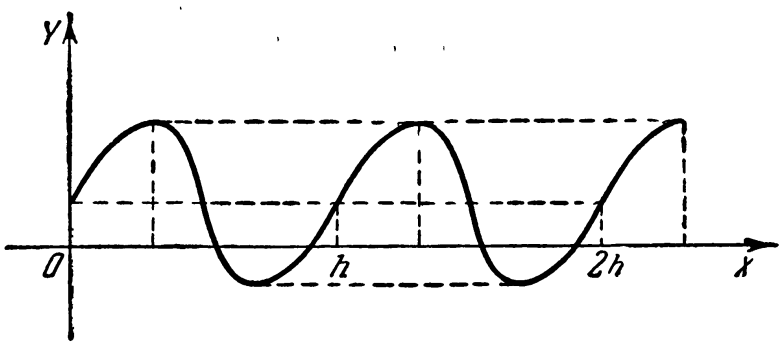
Для доказательства этого предложения возьмем на графике какую-нибудь точку M с координатами (x, y) (черт. 25). Пусть функция четная; тогда ее значение y не изменится, если взять $-x$ вместо x; поэтому вместе с точкой $M(x, y)$ графику функции принадлежит и точка $M_1(-x, y)$, симметричная точке M относительно оси OY (черт. 25). Пусть теперь функция нечетная; тогда, если взять $-x$ вместо x, то значение y функции изменит только знак; поэтому вместе с точкой $M(x, y)$ графику функции принадлежит и точка $M_2(-x, -y)$, симметричная точке M относительно начала координат (черт. 25). Этим наше предложение доказано.

В качестве примеров мы приводим графики четной функции $y=x^2$ (черт. 26, *а*) и нечетной функции $y=x^3$ (черт. 26, *б*).



Черт. 26.

Возьмем теперь график периодической функции с периодом h и рассмотрим часть этого графика, соответствующую какому-нибудь отрезку оси независимой переменной



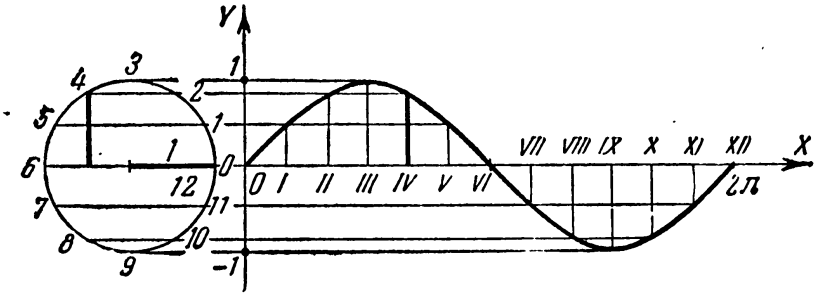
Черт. 27.

длиною h, например от 0 до h. Так как значения функции повторяются при прибавлении h к значениям независимой

переменной, то точки графика, абсциссы которых различаются на h, имеют равные ординаты. Поэтому передвинув указанную часть графика (как твердое тело, причем параллельно оси OX) на h, на $2h$, на $3h$ и т. д. вправо и влево, получим весь график функции (черт. 27).

27. Графики функций $\sin x$ и $\cos x$. Укажем весьма простой геометрический способ построения точек графика функции $y = \sin x$.

Построим единичную окружность с центром в какой-нибудь точке оси OX (черт. 28). Разделим окружность на некоторое число равных частей (на чертеже взято 12 частей) и пронумеруем точки деления последовательно, как показано на чертеже, цифрами 0, 1, 2, ..., 12. Затем разделим отрезок оси OX от 0 до 2π на такое же число равных частей (на 12) и пронумеруем точки деления слева направо цифрами 0, I, II, ..., XII. Тогда точки на оси OX и на окружности, обозначенные одинаковыми номерами, соответствуют друг другу в том смысле, что отрезок ON оси OX изображает число, равное числу радианов, заключенных в дуге ON окружности. Например, отрезок оси OX от точки O до точки IV изображает число $\frac{2}{3}\pi$; дуга окружности от 0 до точки 4 равна как раз $\frac{2}{3}\pi$ радиана.

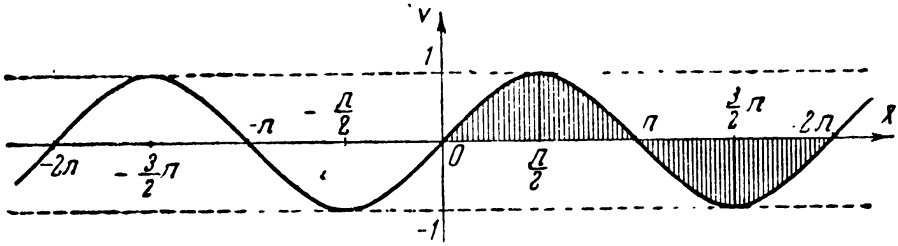


Черт. 28.

Отсюда видно, что значение функции $y = \sin x$ в точке IV оси OX совпадает со значением синуса дуги 04. Синус дуги единичной окружности численно равен перпендикуляру, опущенному из конечной точки дуги на горизонтальный диаметр (см. стр. 30). Ясно, что точка графика, соответствующая точке IV, получается в пересечении прямой, проведенной через точку 4 окружности параллельно оси OX,

с перпендикуляром, восставленным к оси OX в точке IV. Таким способом можно отметить столько точек, принадлежащих графику функции $y = \sin x$, сколько точек деления было взято на отрезке от 0 до 2π (и на единичной окружности).

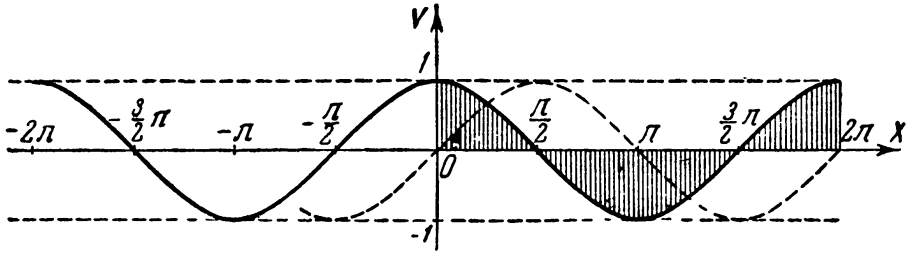
Соединив найденные точки сплошной плавной линией, мы получим ту часть графика функции, которая соответствует



Черт. 29.

изменению независимой переменной от 0 до 2π. Чем больше построено точек графика, тем точнее он будет. Так как $\sin x$ — периодическая функция (с периодом, равным 2π), то, передвинув последовательно уже вычерченную часть графика параллельно оси OX на 2π, на 4π, на 6π и т. д. вправо и влево, мы построим весь график функции (см. п. 26).

Кривая линия, являющаяся графиком функции $y = \sin x$, изображена на черт. 29; эта линия называется *синусоидой*.



Черт. 30.

Так как функция $y = \sin x$ нечетная, то ее график должен быть симметричен относительно начала координат (п. 26). Это хорошо видно на черт. 29.

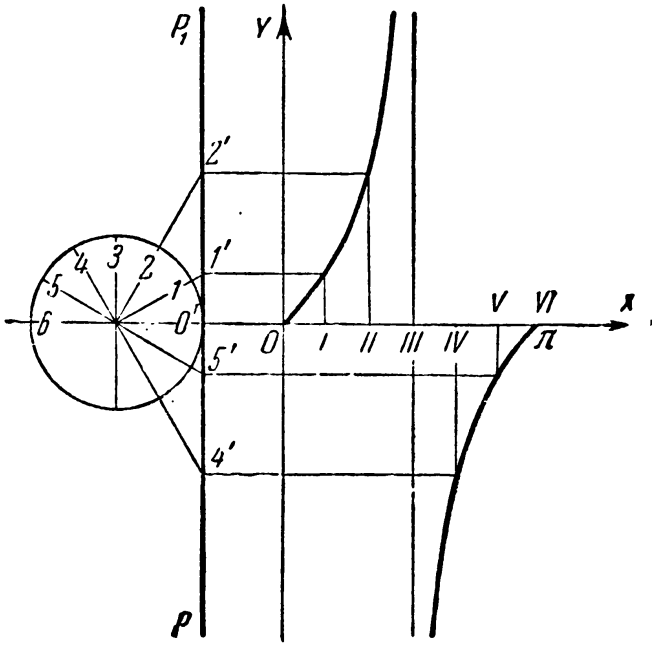
График функции $y = \cos x$ нетрудно получить, имея график функции $y = \sin x$. При любом x имеем:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

см. формулу (В) п. 21]. Следовательно, вместо значения косинуса, можно взять значение синуса, увеличив аргумент на $\frac{\pi}{2}$. Значит, графиком функции $y = \cos x$ служит та же синусоида, но передвинутая на $\frac{\pi}{2}$ влево (черт. 30). В таком положении синусоида иногда называется *косинусоидой* (так как при этом она является графиком функции $y = \cos x$).

Так как функция $y = \cos x$ четная, то ее график должен быть симметричен относительно оси OY (п. 26). Это хорошо видно на черт. 30.

28. Графики функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. Подобно тому как была построена синусоида, может быть построен график



Черт. 31.

функции $y = \operatorname{tg} x$. Но так как период этой функции равен π, то можно ограничиться нахождением точек графика, соответствующих точкам оси OX между 0 и π, и, следовательно, рассматривать дуги в границах одной полуокружности.

Построим единичную окружность с центром в какой-нибудь точке оси OX и касательную PP_1 к этой окружности в точке O' (черт. 31).

Разделим на одинаковое число равных частей верхнюю полуокружность и отрезок оси OX от 0 до π. На черт. 31 взято шесть частей. Точки деления перенумеруем по порядку, как показано на чертеже.

Для того чтобы найти точку графика, соответствующую, например, точке деления II на оси OX, нужно из точки II восставить перпендикуляр к оси OX, выражающий тангенс дуги $0'2$ полуокружности. Но, как известно, тангенс дуги $0'2$ изображается отрезком $0'2'$ оси PP_1 (черт. 31). Подобным образом отрезок $0'5'$ оси PP_1 изображает тангенс дуги $0'5$ окружности.

Перенесем эти отрезки параллельно так, чтобы их начальные точки попали соответственно в точки II и V оси OX; тогда концы отрезков будут точками графика функции

$$y = \operatorname{tg} x,$$

соответствующими точкам II и V оси OX.

Затем таким же образом получим точки графика, соответствующие другим точкам деления отрезка от 0 до π на оси OX. Заметим, что на графике нет точки, соответствующей точке $3\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$. Действительно, тангенса дуги $0'3$ $\left(\text{дуги, равной } \frac{\pi}{2}\right)$ не существует (радиус, проходящий через точку 3, параллелен касательной PP_1).

Соединив построенные точки, соответствующие точкам интервала от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и от $\frac{\pi}{2}$ до π на оси OX, сплошными линиями, получим ту часть графика, которая соответствует изменению независимой переменной от 0 до π. Чем больше построено точек графика, тем точнее он будет. Сразу заметим, что график тангенса в интервале от 0 до π — разрывная линия, что хорошо видно на черт. 31.

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая (с периодом, равным π), то, передвинув параллельно оси OX последовательно вычерченную часть графика на π, 2π, 3π и т. д. вправо и влево, мы построим весь график функции (см. п. 26).

Кривая линия, являющаяся графиком функции

$$y = \operatorname{tg} x,$$

изображена на черт. 32; эта линия называется *тангенсоидой*. Как видим, тангенсоида состоит из совершенно одинаковых и одинаково расположенных отдельных ветвей, заключенных

в параллельных полосах шириной в π (в полосах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3}{2}\pi$ и т. д.).

Так как $y = \operatorname{tg} x$ — функция нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат. На черт. 32 отчетливо видна эта симметрия.

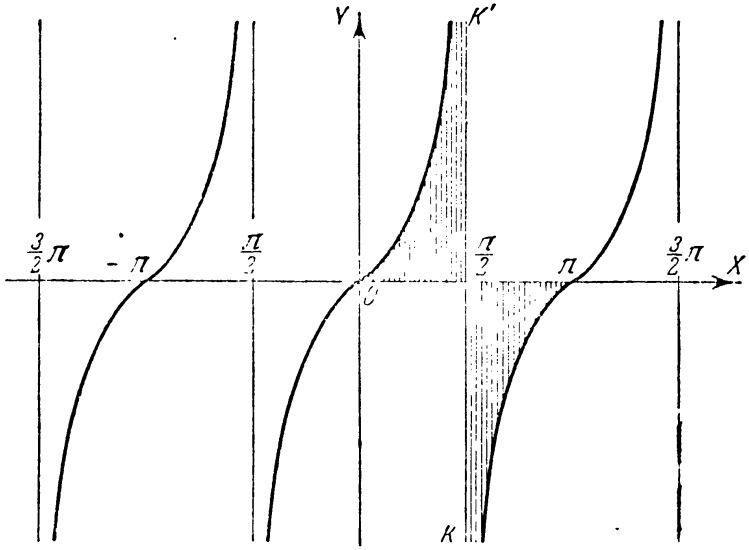
График функции

$$y = \operatorname{ctg} x$$

можно легко получить из графика функции $y = \operatorname{tg} x$. Действительно, из формулы (см. п. 21)

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

следует, что точку графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, соответствующую какой-нибудь абсциссе x, можно найти так: отметить

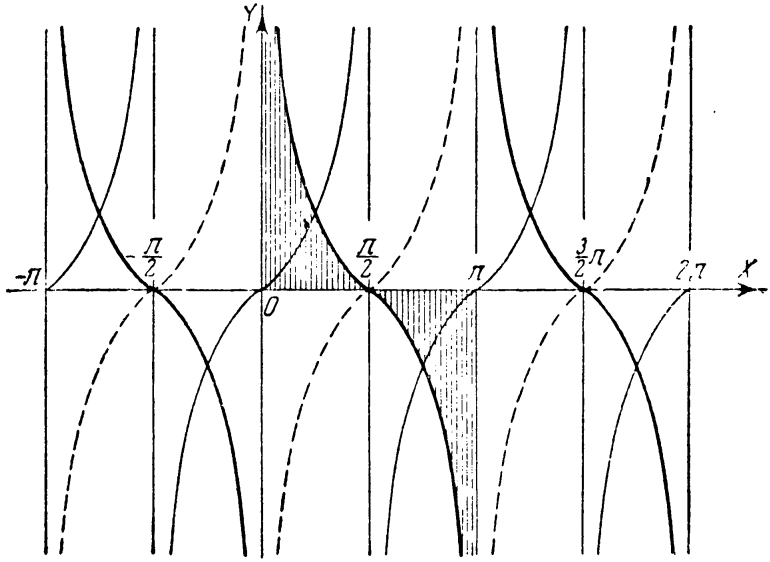


Черт. 32.

точку графика $y = \operatorname{tg} x$, соответствующую точке оси OX, лежащей на $\frac{\pi}{2}$ правее x, а затем взять точку, симметричную с ней относительно оси OX.

Поэтому весь график функции $y = \operatorname{ctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ сдвигом последнего влево (вдоль оси OX) на $\frac{\pi}{2}$ и последующего отражения его (перевертывания) относительно оси OX.

На черт. 33 изображена тонкой линией тангенсоида; пунктирной линией — тангенсоида, сдвинутая влево — вдоль оси OX — на $\frac{\pi}{2}$; жирной линией — график функции $y = \operatorname{ctg} x$.



Черт. 33.

Так как функция $y = \operatorname{ctg} x$ нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат, как это и видно на черт. 33.

§ 9. Изменения тригонометрических функций

29. Характер изменения $\sin x$ и $\cos x$. Пользуясь графиками тригонометрических функций, исследуем изменения этих функций при изменении независимой переменной. Начнем с функции $y = \sin x$.

Пусть x возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (что соответствует возрастанию угла от 0° до 90°). По графику (см. черт. 29) видно, что при этом функция возрастает от 0 до 1 (ордината точки графика увеличивается от 0 до 1).

При возрастании x от $\frac{\pi}{2}$ до π (что соответствует возрастанию угла от 90° до 180°) $\sin x$ убывает от 1 до 0. Пусть x возрастает от π до $\frac{3}{2}\pi$ (что соответствует увеличению угла от 180° до 270°). Как видно по графику (см. черт. 29), $\sin x$ при этом убывает от 0 до -1.

Наконец, если x возрастает от $\frac{3}{2}\pi$ до 2π (что соответствует возрастанию угла от 270° до 360°), $\sin x$ возрастает от -1 до 0.

В силу своей периодичности функция $y = \sin x$ повторяет свой ход изменения через период, равный 2π.

По графику функции $y = \cos x$ (см. черт. 30) можно таким же образом выяснить характер изменения $\cos x$. Ниже приведена таблица, в которой указаны особенности в изменении функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

x	0 (0°)	I четверть	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	II четверть	π (180°)	III четверть	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	IV четверть	2π (360°)
$\sin x$	0	↗ возрастает	1	↘ убывает	0	↘ убывает	-1	↗ возрастает	0
$\cos x$	1	↘ убывает	0	↘ убывает	-1	↗ возрастает	0	↗ возрастает	1

Функции $\sin x$ *и* $\cos x$ *могут изменяться только в границах от* -1 *до* $+1$.

30. Характер изменения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. По графику (см. черт. 32) мы видим, что когда x возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, функция $\operatorname{tg} x$ неограниченно возрастает, начиная от 0. По мере приближения x к $\frac{\pi}{2}$ значения $\operatorname{tg} x$ становятся все больше и больше и могут превзойти любое, как угодно большое, положительное число. Точка кривой на участке оси OX от 0 до $\frac{\pi}{2}$ круто поднимается вверх, стремясь коснуться прямой $K'K$, параллельной оси OY, но нигде ее не касается (как говорят, асимптотически приближается к прямой $K'K$).

Итак, *если x приближается к $\frac{\pi}{2}$, возрастая* (угол, возрастая, приближается к 90°), *то тангенс неограниченно возрастает.*

Пусть, далее, x возрастает от $\frac{\pi}{2}$ до π. График показывает, что $\operatorname{tg} x$ при этом снова возрастает, переходя от как угодно больших по абсолютной величине отрицательных значений к меньшим по абсолютной величине отрицательным значениям и становится равным нулю при $x = \pi$. Если заставить x приближаться к $\frac{\pi}{2}$, убывая, то тангенс, очевидно, может сделаться меньше (в алгебраическом смысле) любого как угодно большого по абсолютной величине отрицательного числа.

Итак, *если x приближается к $\frac{\pi}{2}$, убывая* (угол, уменьшаясь, приближается к 90°), *то тангенс неограниченно убывает.*

Условно говорят, что $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ равен бесконечности, и пишут:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty.$$

Эту запись и ее словесное выражение следует понимать только в том смысле, что если x неограниченно приближается к $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x$ по абсолютной величине неограниченно возрастает (при x возрастающем — будучи положительным, при x убывающем — будучи отрицательным). Знак ∞ не обозначает какого-нибудь числа и, как уже упоминалось, значения тангенса при $x = \frac{\pi}{2}$ (или при $x = 90°$) не существует.

Заметим, что в интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает. Так как этот интервал является периодом функции $y = \operatorname{tg} x$, то $\operatorname{tg} x$ возрастает и в интервалах от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3}{2}\pi$, от $-\frac{3}{2}\pi$ до $-\frac{\pi}{2}$ и т. д. Это постоянное возрастание нарушается только при значениях аргумента $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3}{2}\pi$, $\pm\frac{5}{2}\pi$ и т. п., при этих значениях тангенса не существует, и здесь он «перескакивает» от как угодно больших положительных значений к как угодно большим по абсолютной величине, но отрицательным значениям.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ в противоположность функции $y = \operatorname{tg} x$ является функцией убывающей для значений аргумента, заключенных между 0 и π, π и 2π, $-\pi$ и -2π и т. д. Это постоянное убывание нарушается только тогда, когда x, возрастая, переходит через значения 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$ и т. д.; здесь

котангенс «перескакивает» от как угодно больших по абсолютной величине отрицательных значений к как угодно большим положительным значениям.

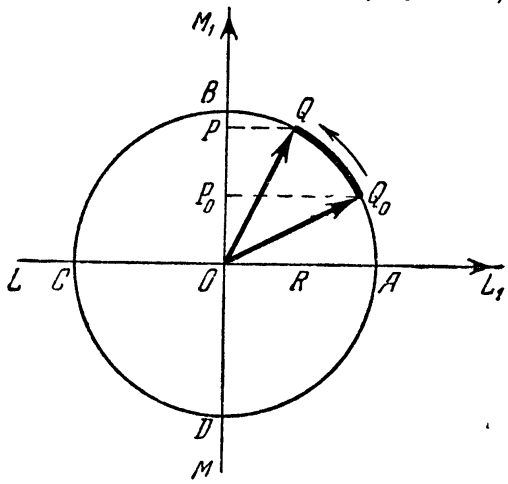
Ниже приведена таблица, в которой указаны особенности в изменении функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$:

x	0 (0°)	I четверть	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	II четверть	π (180°)	III четверть	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	IV четверть	2π (360°)
$\operatorname{tg} x$	0	↗ возрастает	не существует	↗ возрастает	0	↗ возрастает	не существует	↗ возрастает	0
$\operatorname{ctg} x$	не существует	↘ убывает	0	↘ убывает	не существует	↘ убывает	0	↘ убывает	не существует

Функции $\operatorname{tg} x$ *и* $\operatorname{ctg} x$ *могут принимать любые значения.*

§ 10. Гармонические колебания

31. Простые гармонические колебания. Рассмотрим равномерное движение точки по окружности радиуса R (черт. 34). Пусть точка начинает двигаться из точки Q_0 окружности в направлении, противоположном движению часовой стрелки, со скоростью n оборотов в секунду, т. е. радианная мера дуги, пробегаемой точкой в 1 секунду, равна $2\pi n$.



Черт. 34.

Пусть через t секунд движущаяся точка попадает в точку Q окружности. Обозначим через s проекцию OP вектора $\overline{OQ}$ на ось MM_1 и поставим перед собой задачу выяснить, как передвигается точка P вдоль MM_1 при указанном движении точки Q по окружности.

Пусть дуга $\breve{AQ_0}$ равна φ_0. Дуга $\breve{AQ}$ равна дуге $\breve{AQ_0}$, сложенной с дугой $\breve{Q_0Q}$, описанной точкой за t секунд; но последняя дуга равна $2\pi nt$, и, значит,

$$\breve{AQ} = \breve{AQ_0} + \breve{Q_0Q} = \varphi_0 + 2\pi nt,$$

или

$$\angle AOQ = 2\pi\, nt + \varphi_0.$$

Следовательно,

$$s = OP = OQ \sin \angle AOQ = R \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \text{где } \omega = 2\pi n. \quad (5)$$

Полученная формула дает возможность указать положение точки P в любой момент времени.

Движение точки P вдоль диаметра DB, описываемое соотношением (5), называется *простым гармоническим колебанием*. При этом точка P описывает отрезок DB то снизу вверх, то сверху вниз.

Постоянная величина R в формуле (5) называется *амплитудой колебания*. Она указывает наибольшее отклонение точки P от середины O отрезка DB. Это наибольшее отклонение называют *размахом* колебания.

Переменную величину $\varphi = \omega t + \varphi_0$ называют *переменной фазой колебания*, а значение φ при $t = 0$ (в начальный момент), т. е. φ_0, называют *начальной фазой*. Величина

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

называется *периодом колебания* [это есть период функции $s = A \sin(\omega t + \varphi_0)$]. В самом деле, при увеличении t (времени) на T значение s не изменяется:

$$A \sin[\omega(t + T) + \varphi_0] = A \sin(\omega t + \omega T + \varphi_0) =$$
$$= A \sin(\omega t + \varphi_0 + 2\pi) = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

В течение промежутка времени T точка P дважды описывает отрезок DB (один раз снизу вверх, другой раз сверху вниз).

Величина, обратная периоду колебания,

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

называется *частотой колебания*. Она показывает, сколько полных колебаний совершает точка в единицу времени (в 1 секунду).

В нашем примере частота колебания проекции P точки Q на отрезок DB равна n:

$$\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{2\pi n}{2\pi}=n.$$

Действительно, из условий задачи ясно, что колеблющаяся точка P проходит n раз в секунду через каждую точку отрезка DB при движении снизу вверх (и n раз при движении сверху вниз).

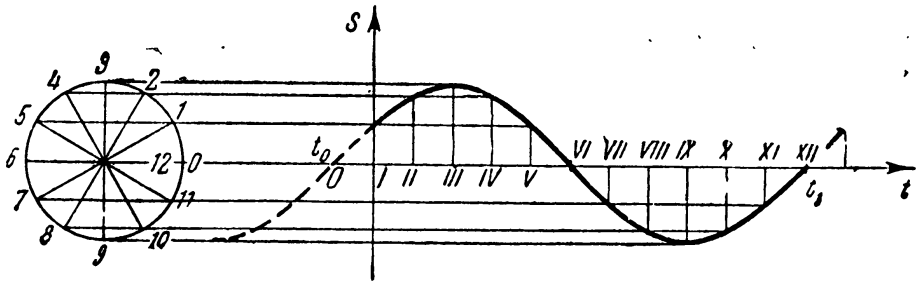
Иногда частотой называют величину ω. Она показывает, сколько полных колебаний совершает точка P в течение 2π единиц времени (секунды).

Аналогично доказывается, что движение проекции точки Q на какой-нибудь другой диаметр окружности будет также простым гармоническим колебанием с теми же амплитудой и периодом (а следовательно, и частотой), но с другой начальной фазой.

32. График простого гармонического колебания. Построим график функции

$$s=A\sin(\omega t+\varphi_0)=A\sin\varphi,$$

приняв горизонтальную ось за ось значений независимой переменной t, а вертикальную — за ось значений функции s (черт. 35).



Черт. 35.

Для этого можно употребить тот же геометрический прием, который был использован при построении обыкновенной синусоиды, если на горизонтальной оси разместить значения переменной фазы $\varphi=\omega t+\varphi_0$.

Прежде всего отметим на этой оси те значения t_0 и t_1, для которых фаза φ равна 0 и 2π:

$$t_0=-\frac{\varphi_0}{\omega} \quad \text{и} \quad t_1=\frac{2\pi-\varphi_0}{\omega}=\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\varphi_0}{\omega}=t_0+T.$$

Отрезок оси между точками t_0 и t_1 разделим на некоторое число n равных частей (на черт. 35 взято 12 частей) и обозначим точки деления последовательно цифрами от 0 до XII. Возьмем, далее, окружность радиуса A с центром в какой-нибудь точке горизонтальной оси. Разделим ее также на n равных частей и перенумеруем точки деления в направлении, противоположном движению часовой стрелки, начиная от точки 0.

Через точки 0, 1, 2, ... окружности проведем горизонтальные прямые, а через точки I, II, ... оси проведем вертикальные прямые. Точки пересечения соответствующих прямых принадлежат искомому графику. Соединив найденные точки сплошной плавной линией, получим ту часть графика функции $s = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, которая соответствует изменению независимой переменной t в границах одного периода от t_0 до $t_1 = t_0 + T$. Передвигая затем эту часть вправо и влево на T, на $2T$, на $3T$ и т. д., вычертим весь график.

Полученная линия называется *деформированной синусоидой*.

Задачи к главе II

1. Найти радианную меру дуги окружности, радиус которой равен 12 *см*, если длина дуги равна:

(a) 4 *см*; (b) 1,2 *см*; (c) 6 *см*; (d) 2,4 *дм*; (e) 0,66 *м*.

2. Радиус окружности равен 20 *см*. Найти длину дуги, если ее радианная мера равна:

(a) 3; (b) 2,4; (c) $\frac{1}{2}$; (d) 0,28.

3. Найти радианную меру угла, составляющего:

(a) $\frac{2}{3}$ полного оборота; (b) 2 полных оборота.

4. Найти радианную меру угла, равного:

(a) 1′; (b) 10°; (c) 135°; (d) 210°.

5. Найти радианную меру угла, равного:

(a) 300°; (b) −45°; (c) −120°; (d) 750°.

6. Найти градусную меру угла, равного:

(a) $\frac{\pi}{10}$ радианам; (b) $-\frac{3\pi}{4}$ радианам;

(c) 4π радианам; (d) $\frac{\pi}{36}$ радианам.

7. Найти градусную меру угла, равного:

(a) 0,6; (b) 1,7; (c) -2; (d) $-2{,}6$; (e) 0,76.

8. Точка движется по окружности радиуса R с угловой скоростью ω. Найти линейную скорость, если:

(a) $R = 40$ *см*, $\omega = 2\frac{1}{сек}$; (b) $R = 60$ *см*, $\omega = 4\pi\frac{1}{сек}$.

9. Длина дуги сектора вдвое меньше его периметра. Найти радианную меру угла сектора.

10. Найти в радианной мере углы треугольника, если они относятся, как 2:3:4.

11. Найти в радианной мере угол правильного пятиугольника.

Упростить выражения (задачи 12—14):

12. $$\frac{\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{3\pi}{2}}.$$

13. $$\frac{\cos(\alpha - \pi)\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\sin(4\pi - \alpha)}{3\sin(3\pi + \alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}.$$

14. $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \operatorname{ctg}(\alpha - \pi)\sin(\alpha - 2\pi)}{\cos(\alpha + \pi)\cos(\alpha - \pi) + \sin(\pi + \alpha)\sin(2\pi - \alpha)}.$$

15. Найти значения выражения

$$\frac{2\sin\alpha - 3\cos 2\alpha}{3\sin 2\alpha + 2\cos\alpha},$$

если α имеет следующие значения: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$ и π.

16. Найти значения выражения

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)},$$

если α имеет следующие значения: 0, $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$ и $-\frac{3}{2}\pi$.

17. Найти значения выражения

$$\frac{\pi\cos\alpha - 1}{\pi\operatorname{ctg}\alpha + 1},$$

если α имеет следующие значения: $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{5\pi}{4}$.

18. Пользуясь таблицей, найти с точностью до 0,001 значения отношения $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, если α имеет следующие значения: 1; 0,5; 0,2 и 0,1.

19. Доказать (геометрически) справедливость неравенств $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$ для любого положительного числа α, меньшего чем $\frac{\pi}{2}$.

Указание. Построить центральные углы α и $-\alpha$ и сравнить длину соответствующей дуги с длиной хорды.

20. Что больше: $\sin 1$ или $\cos 1$?

21. Пользуясь таблицей, найти с точностью до 0,001 ошибку приближенного равенства $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$, если α имеет следующие значения: 0,4; 0,3; 0,2.

---

22. Являются ли периодическими функции:

(a) $y = 1 + \sin x$; (b) $y = x + \sin x$; (c) $y = \sin x + \cos x$;

(d) $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$; (e) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$; (f) $y = 2\operatorname{tg} x + 1$?

23. Найти периоды функций:

(a) $y = \frac{\sin x}{2}$; (b) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$; (c) $y = \sin^2 x$.

24. Показать, что функции

(a) $y = \sin^2 x$; (b) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; (c) $y = \frac{1 + \cos x}{x^2}$;

(d) $y = \frac{x + \sin x}{\operatorname{tg}^3 x}$; (e) $y = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x - \operatorname{tg} x}$

являются четными.

25. Показать, что функции

(a) $y = \operatorname{tg}^3 x$; (b) $y = x + \sin x$; (c) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$;

(d) $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$; (e) $y = -\frac{1}{\sin^3 x}$; (f) $y = \frac{1 + \sin^2 x}{\operatorname{tg} 3x}$

являются нечетными.

26. Указать, какие из нижеследующих функций являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными.

(a) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; (b) $y = \operatorname{tg} x + \cos x$; (c) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \sin^2 x}$;

(d) $y = 1 + \sin x$; (e) $y = x^2 + \cos x$; (f) $y = \frac{x \sin x}{1 + \cos x}$.

27. По графикам функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и $y = \operatorname{tg} x$ выяснить знаки следующих чисел:

(a) $\sin \frac{2}{3}\pi$; (b) $\sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$; (c) $\sin 5$;

(d) $\cos 2$; (e) $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$; (f) $\cos 3{,}2$;

(g) $\operatorname{tg} 1{,}5$; (h) $\operatorname{tg} 4{,}5$; (i) $\operatorname{tg}(-3{,}1)$.

28. Не производя вычислений, выяснить (по графику), что больше:

(a) $\sin 0{,}7\pi$ или $\sin 0{,}71\pi$; (b) $\cos 1{,}6\pi$ или $\cos 1{,}68\pi$;

(c) $\operatorname{tg} 7{,}2\pi$ или $\operatorname{tg} 7{,}25\pi$; (d) $\operatorname{ctg}\left(-4\frac{5}{6}\pi\right)$ или $\operatorname{ctg}\left(-4\frac{5}{9}\pi\right)$;

(e) $\operatorname{tg} 2\frac{7}{16}\pi$ или $\operatorname{tg} 2\frac{9}{16}\pi$; (f) $\operatorname{ctg} 6{,}9\pi$ или $\operatorname{ctg} 7{,}1\pi$?

29. Не производя вычислений, указать знак разности:

(a) $\sin(-2) - \sin(-2{,}1)$; (b) $\cos 5{,}1 - \cos 5$;

(c) $\operatorname{tg}\left(-\frac{10}{23}\right) - \operatorname{tg}\left(-\frac{11}{23}\right)$; (d) $\operatorname{ctg} 0{,}583 - \operatorname{ctg} 0{,}582$;

(e) $\operatorname{tg} 1{,}6 - \operatorname{tg} 1{,}5$; (f) $\operatorname{ctg} 6{,}3 - \operatorname{ctg} 6{,}2$.

30. Проверить, что в границах от 0 до 2π неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$ справедливо при всех значениях независимой переменной x, заключенных между числами $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. При каких значениях x в границах от 0 до 2π справедливо неравенство $\cos x < \frac{1}{2}$?

31. Построить график функции $y = |\operatorname{tg} x|$ и, пользуясь графиком, указать, при каких значениях x в границах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ справедливо неравенство $|\operatorname{tg} x| < 1$?

32. Построить график функции $y = |\sin x|$ и, пользуясь графиком, указать, при каких значениях x в границах от 0 до 2π справедливо неравенство $|\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$?

33. При каких значениях x в границах от π до 2π справедливо неравенство $\operatorname{ctg}^2 x > 1$?

34. Построить график функции $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ и по графику разобрать вопрос о поведении функции. Результаты свести в таблицу.

35. То же для функции $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

---

36. Точка P совершает простое гармоническое колебание вдоль отрезка $CC' = 16$ *см*. Расстояние s точки P от середины отрезка CC' изменяется в зависимости от изменения времени t по следующему закону:

$$s = 8 \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Определить положение точки P на отрезке CC' в начале движения и по прошествии 2, 4, 8 секунд. Через сколько секунд после начала движения точка P в первый раз достигнет точки C'?

37. Точка P совершает простое гармоническое колебание вдоль отрезка CC'; O — середина отрезка CC'. Расстояние CC', равное 12 *см*, точка P проходит за 14 секунд. От начального положения, совпадав-

него с серединой отрезка CC', точка P начала перемещаться по направлению к точке C'. Составить формулу, выражающую закон изменения расстояния s точки P от точки O в зависимости от времени t.

38. Точка движется равномерно по окружности, радиус которой равен 10 *см*, в направлении, обратном движению часовой стрелки, делая 2 полных оборота в секунду. Составить формулу, выражающую закон изменения расстояния проекции точки на вертикальный диаметр от центра окружности, если начальное положение точки совпадало с правым концом горизонтального диаметра.

39. Найти амплитуду, период и начальную фазу простого гармонического колебания, заданного формулой:

(a) $s = 6 \sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$; (b) $s = \frac{1}{2} \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$;

(c) $s = 2{,}5 \sin\left(\frac{t}{2} + 1\right)$; (d) $s = 3 \sin 2t$;

(e) $s = 0{,}2 \sin\left(0{,}1\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$; (f) $s = \sin(t - 2)$.

40. Построить график простого гармонического колебания в границах одного периода:

(a) $s = 3 \sin 2t$; (b) $s = 2 \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$;

(c) $s = 4 \sin\left(\frac{2}{3}t - \frac{\pi}{4}\right)$.

41. Построить график функции:

(a) $y = \sin 2x$; (b) $y = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$;

(c) $y = 2{,}5 \sin\left(1{,}5x + \frac{\pi}{4}\right)$; (d) $y = 4 \sin\left(\frac{x}{4} + 1\right)$;

(e) $y = 2 \sin(3x + 2)$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 11. Формулы сложения и вычитания

33. Обобщение формулы проекций. Для дальнейшего нам необходимо обобщить формулу проекций [см. формулу (19) гл. I на стр. 26]:

$$a = c \cos \alpha,$$

которая позволяет вычислить проекцию a вектора на ось, если известны его длина c и угол α вектора с осью. Мы докажем, что эта формула остается справедливой, если вместо длины c вектора взять алгебраическую величину d этого вектора как отрезка, лежащего на некоторой оси, а под α понимать угол между этой осью и осью проекции.

Теорема. *Проекция a отрезка оси на другую ось равна алгебраической величине d отрезка, умноженной на косинус угла α между осями,* т. е.

$$a = d \cos \alpha. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть дана ось NN_1, образующая угол α с осью проекций RR_1 (черт. 36). Рассмотрим как положительные, так и отрицательные отрезки оси NN_1 и возьмем их проекции на ось RR_1.

Алгебраическая величина d положительного отрезка AB равна его длине c, т. е. $d = c$. Этот отрезок, рассматриваемый как вектор $\overline{AB}$, образует угол α с осью RR_1. Его проекция A_1B_1 на эту ось по формуле (19) гл. I равна:

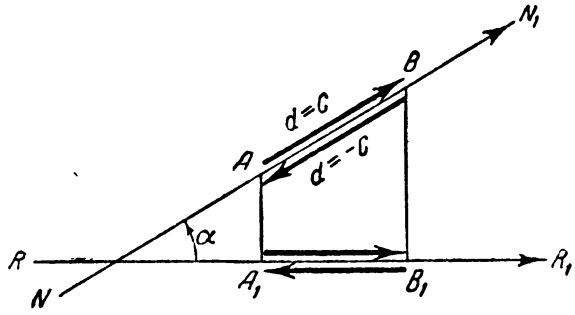
$$A_1B_1 = c \cos \alpha. \tag{2}$$

Здесь $A_1B_1 = a$, $c = d$ и формула (1) доказана.

Алгебраическая величина отрицательного отрезка BA равна $-c$, т. е. $d = -c$; из формулы (2) следует:

$$B_1A_1 = -c\cos\alpha = d\cos\alpha.$$

Но в данном случае $B_1A_1 = a$, и поэтому мы снова приходим



Черт. 36.

к доказываемой формуле:

$$a = d\cos\alpha,$$

ч. т. д.

34. Формулы сложения и вычитания для косинуса. В основе теории тригонометрических функций лежат так называемые *формулы сложения*, выражающие значение тригонометрической функции суммы двух аргументов через значения тригонометрических функций аргументов-слагаемых.

Теорема. *Для произвольных значений α и β имеет место следующая формула сложения для косинуса*:

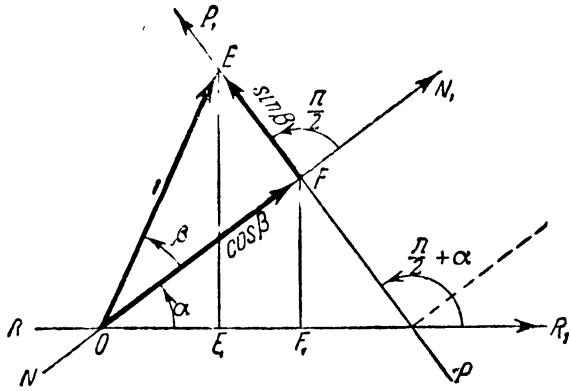
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad (3)$$

т. е. *косинус суммы равен произведению косинусов минус произведение синусов слагаемых* [1]).

Доказательство. Через точку O какой-нибудь оси RR_1 проведем под углом α другую ось NN_1, а под углом β к оси NN_1 через ту же точку O проведем единичный вектор $\overline{OE}$ (черт. 37). Таким образом, вектор $\overline{OE}$ образует угол $\alpha+\beta$ с осью RR_1. Через конец E вектора $\overline{OE}$ проведем третью ось PP_1, перпендикулярную к оси NN_1. Ось PP_1 составляет

[1]) Это — краткое словесное выражение формулы (3). Для некоторых важных формул мы и в последующем даем такие словесные выражения, которые иногда удобнее запомнить, чем вид самой формулы.

угол $\frac{\pi}{2}+\alpha$ с осью RR_1. Точку пересечения осей PP_1 и NN_1 обозначим через F.



Черт. 37.

Выразим проекцию OE_1 единичного вектора $\overline{OE}$ на ось RR_1 двумя способами. С одной стороны, непосредственно найдем:

$$OE_1 = 1 \cdot \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta), \tag{4}$$

а с другой стороны, рассматривая вектор $\overline{OE}$ как замыкающий ломаной, составленной из векторов $\overline{OF}$ и $\overline{FE}$, получим (см. п. 8):

$$OE_1 = OF_1 + F_1E_1, \tag{4'}$$

причем OF_1 есть проекция вектора $\overline{OF}$ на ось RR_1, а F_1E_1 — проекция на ту же ось вектора $\overline{FE}$.

Заметим теперь, что вектор $\overline{OF}$ можно считать отрезком оси NN_1 с алгебраической величиной $d = \cos\beta$, а вектор $\overline{FE}$ — отрезком оси PP_1 с алгебраической величиной $d = \sin\beta$. Действительно, единичный вектор $\overline{OE}$ образует угол β с осью NN_1, которую можно рассматривать в качестве «первой оси», а ось PP_1 — в качестве «второй оси», и тогда проекции вектора $\overline{OE}$ на эти оси будут равны: $OF = \cos\beta$, $FE = \sin\beta$ (см. п. 12).

В соответствии с формулой (1) будем иметь:

$$OF_1 = OF \cdot \cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha$$

и

$$F_1E_1 = FE \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\beta\sin\alpha. \tag{5}$$

Подставляя эти выражения для OF_1 и F_1E_1 в формулу (4') и сравнивая с формулой (4), придем к доказываемому равенству (3):

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Формула (3) справедлива для любых значений аргументов α и β, так как теоремы о проекциях, на которые опиралось доказательство, были доказаны для любых углов.

Заменив в формуле (3) β на $-\beta$, получим формулу вычитания для косинуса:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \qquad (6)$$

т. е. *косинус разности равен произведению косинусов плюс произведение синусов уменьшаемого и вычитаемого.*

35. Формулы сложения и вычитания для синуса. Выведем сначала формулу сложения для синуса. На основании формулы (6) имеем:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Итак,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \qquad (7)$$

т. е. *синус суммы равен сумме произведений синуса первого слагаемого на косинус второго и косинуса первого слагаемого на синус второго.*

Заменяя в формуле (7) β на $-\beta$, получим формулу вычитания для синуса:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta, \qquad (8)$$

т. е. *синус разности равен разности произведений синуса уменьшаемого на косинус вычитаемого и косинуса уменьшаемого на синус вычитаемого.*

Формулы (7) и (8) верны для любых значений α и β.

Примеры.

1) $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1);$$

2) $\sin(\pi+\alpha)=\sin\pi\cos\alpha+\cos\pi\sin\alpha=$
$$=0\cdot\cos\alpha+(-1)\sin\alpha=-\sin\alpha.$$

Все выведенные раньше формулы приведения являются частным случаем формул сложения.

36. Формулы сложения и вычитания для тангенса. Из формул (7) и (3) следует формула сложения для тангенса. Именно:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Предположим, что и $\cos\alpha$, и $\cos\beta$ отличны от нуля. Разделив числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части, на $\cos\alpha\cos\beta$, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Приходим к формуле сложения для тангенса:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\qquad(9)$$

т. е. *тангенс суммы равен сумме тангенсов слагаемых, деленной на разность между единицей и произведением этих тангенсов.*

Если же $\cos\alpha=0$ или $\cos\beta=0$, то не существует $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{tg}\beta$.

Таким образом, формула (9) справедлива для всех значений аргументов, за исключением тех, для которых не существует хотя бы одна из функций, входящих в формулу.

Заменив в формуле (9) β на $-\beta$, получим формулу вычитания для тангенса:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\qquad(10)$$

т. е. *тангенс разности равен разности тангенсов уменьшаемого и вычитаемого, деленной на сумму единицы и произведения этих тангенсов.*

Аналогично могут быть выведены формулы сложения вычитания для котангенса, но они употребляются весьма редко при необходимости читатель выведет их самостоятельно.

§ 12. *Формулы для двойного и половинного аргумента*

37. Тригонометрические функции двойного аргумента. Рассмотрим частный случай формул сложения, когда аргументы-слагаемые равны между собой. Положив в формулах (7), (3) и (9) $\beta = \alpha$, получим:

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (11)$$

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad (12)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (13)$$

Формулы (11) — (13) выражают тригонометрические функции двойного аргумента 2α через тригонометрические функции аргумента α.

Последовательное применение теорем сложения позволяет выразить тригонометрические функции аргументов 3α, 4α, 5α, через тригонометрические функции аргумента α.

Пример.

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = \\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = \\ &= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha.\end{aligned}$$

Из сказанного следует, что по значениям тригонометрических функций, например для 1°, можно при помощи формул сложения найти значения тригонометрических функций для всех углов, выраженных целым числом градусов.

38. Тригонометрические функции половинного аргумента. Выразим тригонометрические функции половинного аргумента $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ через тригонометрические функции целого аргумента (α). Заменив в формулах (11) и (12) аргумент α на $\frac{\alpha}{2}$ и, следовательно, 2α на α и переставив правые и левые части этих тождеств, получим:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha, \qquad (14)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha. \qquad (15)$$

Добавим еще основное соотношение:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1. \qquad (16)$$

Почленное сложение тождеств (15) и (16) дает:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha. \qquad (17)$$

Почленное вычитание тождества (15) из тождества (16) дает:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha. \qquad (18)$$

Из тождеств (17) и (18) имеем:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad (19)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad (20)$$

Наконец, почленное деление тождества (14) на тождество (17) приводит к тождеству

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

значит,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (21)$$

Аналогично почленным делением тождества (18) на тождество (14) находим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (22)$$

и если почленно разделить тождество (20) на тождество (19), то получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (23)$$

В формулах (19), (20) и (23) значения $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ находятся с помощью извлечения квадратного корня. Знак перед корнем ставится в зависимости от величины угла $\frac{\alpha}{2}$; необходимость выбора знака делает формулу (23)

менее удобной для отыскания $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, чем формулы (21) и (22) (если, разумеется, заранее известны значения и $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$).

Примеры.

$$\sin 45^\circ = +\sqrt{\frac{1-\cos 90^\circ}{2}} = +\sqrt{\frac{1-0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin 225^\circ = -\sqrt{\frac{1-\cos 450^\circ}{2}} = -\sqrt{\frac{1-0}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

39. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Покажем сейчас, что все тригонометрические функции аргумента α выражаются через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ рационально, т. е. с помощью одних только четырех арифметических действий. (Вспомним, что тригонометрические функции одного и того же аргумента выражаются друг через друга, как правило, иррационально, с помощью извлечения корней.)

В самом деле, заменяя в формуле (13) α на $\frac{\alpha}{2}$, получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

отсюда

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Вывести формулу для $\sin\alpha$ можно так:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$\left(\text{потому, что } \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)$; аналогично находим формулу для $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Выведенные формулы дают нам рациональные выражения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Обозначая $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через t, получим:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{2t}{1+t^2}, & \cos\alpha &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{2t}{1-t^2}, & \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{1-t^2}{2t}. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

§ 18. Преобразования произведений тригонометрических функций в сумму и обратные преобразования

40. Формулы для произведений синусов и косинусов. Выведем формулы, выражающие произведения тригонометрических функций через их суммы.

Почленным сложением и вычитанием формул

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

получим:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta, \qquad (25)$$

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta. \qquad (25_1)$$

Аналогично из формул

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

путем почленного сложения и вычитания получим:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta, \qquad (26)$$

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta. \qquad (27)$$

Переставив правые и левые части формул (25), (26), (27) и разделив их почленно на 2, приходим к тождествам:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)], \qquad (25')$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)], \qquad (26')$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]. \qquad (27')$$

41. Приведение к виду, удобному для логарифмирования. При пользовании таблицами логарифмов и логарифмической линейкой полезны бывают преобразования суммы тригонометрических функций в их произведения, т. е. преобразования, обратные рассмотренным в п. 40. Положим:

$$\alpha+\beta=x, \quad \alpha-\beta=y.$$

Тогда

$$\alpha=\frac{x+y}{2}, \quad \beta=\frac{x-y}{2}.$$

Формулы (25) — (27) примут вид:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{28}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \tag{29}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{30}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=$$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2} \tag{31}$$

(потому что $\sin\frac{x-y}{2}=-\sin\frac{y-x}{2}$).

Тождества (28) — (31) обычно формулируют так:

Сумма синусов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на косинус полуразности[1]).

Разность синусов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на синус полуразности.

Сумма косинусов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности.

Разность косинусов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на синус обратной полуразности (обратной разностью чисел a и b называют $b-a$).

Найдем аналогичные выражения для суммы тангенсов:

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}.$$

Так как числитель в правой части равен $\sin(x+y)$, то

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}. \tag{32}$$

---

[1]) Более точная формулировка такова: сумма синусов двух аргументов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих аргументов на косинус их полуразности. Аналогичные замечания относятся и к дальнейшим кратким словесным формулировкам.

Подобным же образом найдем:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}.$$

Преобразование суммы тригонометрических функций в их произведение называется *приведением к виду, удобному для логарифмирования.*

Пример.

$$\lg(\sin 67^\circ + \sin 13^\circ) = \lg\left(2\sin\frac{67^\circ+13^\circ}{2}\cos\frac{67^\circ-13^\circ}{2}\right) =$$
$$= \lg(2\sin 40^\circ \cdot \cos 27^\circ) =$$
$$= \lg 2 + \lg\sin 40^\circ + \lg\cos 27^\circ.$$

42. Преобразования с помощью вспомогательного аргумента. Познакомимся с особым приемом преобразования тригонометрических выражений — введением вспомогательного аргумента. Этот прием заключается в том, что некоторые числа рассматриваются как значения тригонометрических функций вспомогательного аргумента φ.

В качестве примера преобразования такого рода рассмотрим преобразование выражения

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha$$

к виду, удобному для логарифмирования. Мы подберем такой аргумент φ и такой положительный множитель ρ, чтобы было

$$\rho\cos\varphi = a, \quad \rho\sin\varphi = b.$$

Для подбора таких ρ и φ возведем обе части каждого из последних равенств в квадрат и сложим их после этого почленно. Получим:

$$\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = a^2 + b^2,$$

или $\rho^2 = a^2 + b^2$, откуда находим:

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Значит,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Из этих равенств можно найти вспомогательный аргумент φ. Итак,

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \rho\cos\varphi\sin\alpha + \rho\sin\varphi\cos\alpha =$$
$$= \rho(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) = \rho\sin(\alpha+\varphi).$$

Пример.

$$3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha = 5 \sin (\alpha + 0{,}643),$$

так как

$$s = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5; \quad \sin \varphi = \frac{3}{5} = 0{,}6; \quad \cos \varphi = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

(из второго или третьего равенства и находим, что $\varphi = 0{,}643$, см. таблицу на стр. 57).

Задачи к главе III

1. Найти $\cos 105°$, рассматривая угол в $105°$ как сумму углов в $60°$ и $45°$.

2. Найти по таблице $\sin 13°$, $\cos 13°$, $\sin 37°$ и $\cos 37°$, а затем, пользуясь формулами сложения и вычитания, найти $\cos 50°$ и $\cos 24°$. Найденные результаты сверить с таблицей.

3. Пользуясь формулами сложения и вычитания, доказать следующие формулы приведения:

$$\text{(a) } \cos (180° + \alpha) = -\cos \alpha; \quad \text{(b) } \cos (270° - \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\text{(c) } \cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha; \quad \text{(d) } \cos \left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin \alpha.$$

4. Дано: $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$, $\cos \beta = \frac{1}{3}$, причем $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$.

Найти $\cos (\alpha + \beta)$ и $\cos (\alpha - \beta)$.

5. Дано: $\sin \alpha = -\frac{8}{17}$, $\cos \beta = 0{,}96$, причем $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найти $\sin (\alpha + \beta)$ и $\sin (\alpha - \beta)$.

6. Синусы двух острых углов треугольника соответственно равны $\frac{7}{25}$ и $\frac{4}{5}$. Найти косинус третьего угла.

7. Из точки O, взятой внутри треугольника ABC, стороны AB, AC и BC видны под тупыми углами. Зная, что $\sin \angle AOB = \frac{1}{\sqrt{3}}$, а $\cos \angle BOC = -\frac{1}{3}$, найти $\sin \angle AOC$.

8. Найти $\sin (60° - \alpha)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ и $180° < \alpha < 270°$.

9. Найти $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$ и $\operatorname{tg} (\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{5}$.

10. Найти $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$ и $\operatorname{tg} (\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ и $\sin \beta = 0{,}28$, причем $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

11. Найти $\operatorname{tg} (45° - \alpha)$, если $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ и $180° < \alpha < 270°$.

12. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=a$.

13. Найти $\sin\alpha$, если $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

14. Дано: $\sin(\alpha+\beta)=a$, $\sin(\alpha+\gamma)=b$, причем каждое из положительных чисел α, β и γ меньше, чем $\frac{\pi}{4}$. Найти $\sin(\beta-\gamma)$.

15. Синусы двух острых углов соответственно равны $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{1}{\sqrt{10}}$. Доказать, что сумма данных углов равна 45°.

16. Дано: $\sin\alpha=0{,}8$, $\sin\beta=0{,}28$, $\cos\gamma=-\frac{5}{13}$, причем $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$. Найти $\cos(\alpha+\beta-\gamma)$.

17. Тангенсы трех острых углов соответственно равны $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{8}{19}$. Доказать, что сумма первых двух углов на 45° превышает третий угол.

Упростить выражения (задачи 18—28):

18. (a) $\sin(\alpha+30°)-\sin(\alpha-30°)$; (b) $\cos(\alpha+45°)-\cos(\alpha-45°)$.

19. (a) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$; (b) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$.

20. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$.

21. $\sin 10°\cos 50°+\cos 10°\sin 50°$.

22. $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$.

23. $\cos(20°+\alpha)\cos(20°-\alpha)+\sin(20°+\alpha)\sin(20°-\alpha)$.

24. $\cos(36°+\alpha)\cos(54°+\alpha)-\sin(36°+\alpha)\sin(54°+\alpha)$.

25. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

26. $\sin\alpha+\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$.

27. (a) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}$; (b) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}$.

28. (a) $\sin 15°+\operatorname{tg}30°\cos 15°$; (b) $\cos 20°+\operatorname{tg}\alpha\sin 20°$;
(c) $\sin\alpha+\operatorname{ctg}3\alpha\cos\alpha$.

Доказать тождества (задачи 29—36):

29. $\cos^2\alpha-\sin(30°+\alpha)\sin(30°-\alpha)=\frac{3}{4}$.

30. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

31. $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}=\cos 2\alpha$.

32. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}2\alpha$.

33. $\frac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta.$

34. $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\gamma)\cos\gamma=$
$=\sin(\alpha+\gamma)\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\beta.$

35. $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}\alpha=1+\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)\operatorname{tg}\alpha.$

36. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\beta-\gamma)+\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)=$
$=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}(\beta-\gamma)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha).$

37. Косинус суммы двух углов равен 0,3, а косинус их разности равен 0,8. Найти произведение синусов данных углов.

38. Доказать, что тангенс разности двух дополнительных углов вдвое меньше разности тангенсов этих углов.

---

39. Найти по таблице $\sin 39^\circ$ и $\cos 39^\circ$, а затем, пользуясь формулами, найти $\sin 78^\circ$ и $\cos 78^\circ$. Найденные результаты сверить с таблицей.

40. Найти по таблице $\operatorname{tg} 31^\circ$, а затем, пользуясь формулами, найти $\operatorname{tg} 62^\circ$ и $\operatorname{tg} 28^\circ$.

41. Найти $\sin 20^\circ$, если $\sin 10^\circ=a$.

42. Найти $\cos\frac{\pi}{10}$, если $\cos\frac{\pi}{20}=a$.

43. Дано $\sin\alpha=\frac{7}{25}$, где $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$.

44. Выразить $\cos\alpha$ через $\sin\frac{\alpha}{2}$.

45. Дано: $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2n}{1+n^2}$. Найти $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

46. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{7}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}$. Найти $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$.

47. Дано: $\sin\alpha=0{,}8$, $\cos\beta=-\frac{5}{13}$, причем углы α и β тупые. Найти: (a) $\sin(\alpha+2\beta)$; (b) $\cos(2\alpha-\beta)$; (c) $\operatorname{tg}[2(\alpha-\beta)]$.

48. Доказать, что $\sin 2\alpha<2\sin\alpha$, если $0<\alpha<\pi$.

49. Доказать, что $\operatorname{tg} 2\alpha>2\operatorname{tg}\alpha$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

50. Синус угла, образованного диагональю ромба с его стороной, равен 0,2. Найти косинусы углов ромба.

51. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{3}{4}$. Найти косинус угла при вершине треугольника.

52. Выразить $\operatorname{tg} 3\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

53. При каком значении x в границах от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $y=\sin x+\cos x$ принимает наибольшее значение? Найти это наибольшее значение функции.

Указание. Предварительно доказать тождество

$$\sin x+\cos x=\sqrt{1+\sin 2x}.$$

54. При каком значении x в границах от 0 до π функция $y=\sin x-\cos x$ принимает наибольшее значение?

Упростить выражения (задачи 55—65):

55. (a) $2\sin 20^\circ \cos 20^\circ$; (b) $\sin 10^\circ \cos 10^\circ$.

56. (a) $\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha$; (b) $\cos^2\alpha - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

57. (a) $\frac{2\operatorname{tg} 3\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 3\alpha}$; (b) $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ-\alpha)}$.

58. $\cos^2\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{3\pi-\alpha}{2}$.

59. (a) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$; (b) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin 3\alpha\cos\alpha-\cos 3\alpha\sin\alpha}$.

60. $\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}-\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$. **61.** $\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

62. (a) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; (b) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

63. $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$. **64.** $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}$.

65. (a) $2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$;
(b) $\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$.

Проверить справедливость равенств (задачи 66—67):

66. (a) $\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\frac{1}{4}$; (b) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{2}$.

67. (a) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=2$.

Доказать тождества (задачи 68—81);

68. $\cos^3\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 4\alpha}{4}$.

69. $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

70. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{2\cos 2\alpha-1}{2\cos 2\alpha+1}$.

71. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$. **72.** $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

73. $\frac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$. **74.** $\frac{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)-1}{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)+1}=\sin 2\alpha$.

75. $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{1}{\cos 2\alpha}$.

76. $\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\beta-\alpha)-$
$-2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)\cos 2\alpha=\sin^2 2\alpha$.

77. $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-6}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2}=\cos 4\alpha.$

78. $\frac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=3.$

79. $\sin\frac{4\pi-3\alpha}{3}\sin\frac{2\pi-3\alpha}{3}+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\frac{10\pi-3\alpha}{3}=$
$=-\cos 2\alpha.$

80. $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-4\operatorname{ctg}4\alpha.$

Проверить справедливость равенств (задачи 81—82):

81. $\sin 18^\circ\cos 36^\circ=\frac{1}{4}.$

Указание. Умножить и разделить левую часть на $\cos 18^\circ$.

82. $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8}$ (см. Указание к предыдущей задаче).

---

83. Найти $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$ и $\operatorname{tg} 15^\circ$, зная значения тригонометрических функций угла в 30°.

84. Пользуясь результатами решения предыдущей задачи, найти $\operatorname{tg} 7^\circ 30'$.

85. Найти $\operatorname{tg} 22^\circ 30'$.

86. Дано: $\cos\alpha=\frac{3}{4}$, причем $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

87. Дано: $\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$, причем $90^\circ<\alpha<135^\circ$. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

88. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2{,}4$, причем $0<\alpha<\pi$. Найти $\sin\frac{\alpha}{4}$, $\cos\frac{\alpha}{4}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$.

89. Дано: $\cos 3\alpha=-\frac{1}{3}$, причем $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}$. Найти $\sin\frac{3\alpha}{2}$, $\cos\frac{3\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}$.

90. Дано: $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{a}}{1+a}$, причем $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

91. Вывести геометрически (непосредственно из треугольника) формулу $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ для острого угла α.

Указание. В прямоугольном треугольнике провести биссектрису острого угла α и воспользоваться теоремой о биссектрисе угла в треугольнике.

92. Доказать, что два значения, которые может принимать $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ при данном значении $\sin\alpha$, взаимно обратны. Дать геометрическое истолкование этого факта.

Упростить выражения (задачи 93—95):

93. (a) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}}$; (b) $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}$.

94. (a) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$; (b) $\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{1+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}$.

95. (a) $\dfrac{\cos 12^\circ}{1-\sin 12^\circ}$; (b) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$.

Указание. Заменить $\cos 12^\circ$ и $\sin 12^\circ$ соответствующими тригонометрическими функциями угла в 102°.

Доказать тождества (задачи 96—100):

96. (a) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha=1$; (b) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha=1$.

97. (a) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; (b) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

98. $\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)=2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

99. $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **100.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha=\sin\alpha$.

101. Дано: $\cos 20^\circ=m$. Найти $\cos 5^\circ$.

102. Синус разности двух дополнительных углов равен m. Найти тангенсы данных углов.

103. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{5}$. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

104. Найти значение выражения $\dfrac{\sin\alpha}{2-3\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

105. Найти значение выражения $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{15}$.

106. Выразить $\sin 2\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$.

107. Доказать, что синус и косинус одного и того же угла могут быть оба рациональными тогда и только тогда, когда тангенс половинного угла есть число рациональное (или не существует).

---

108. Найти, не пользуясь таблицей, числовые значения выражений: (a) $\sin 45^\circ\cos 15^\circ$; b) $\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}$; (c) $\cos 75^\circ\sin 105^\circ$.

109. Пользуясь таблицей и формулами преобразования произведения функций в сумму, найти числовые значения выражений:

(a) $\sin 18^\circ \sin 22^\circ \sin 10^\circ$; (b) $\sin 36^\circ \sin 24^\circ \sin 48^\circ$;

(c) $\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$.

Преобразовать произведения функций в суммы (задачи 110—114):

110. (a) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$; (b) $\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$.

111. (a) $\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)$; (b) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

112. (a) $\sin\alpha\cos 2\alpha$; (b) $\cos\alpha\cos 3\alpha$.

113. $\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$.

114. $\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha$.

115. Пользуясь формулами преобразования произведения функций в сумму, доказать следующие тождества:

(a) $2\sin 2\alpha\sin\alpha+\cos 3\alpha=\cos\alpha$;

(b) $\sin(\alpha-30^\circ)\cos(\alpha+30^\circ)=\frac{2\sin 2\alpha-\sqrt{3}}{4}$;

(c) $\sin\alpha-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)=\frac{1}{2}$.

Преобразовать суммы функций в произведения (задачи 116—121):

116. (a) $\sin 12^\circ+\sin 20^\circ$; (b) $\sin 40^\circ-\sin 16^\circ$;

(c) $\cos 50^\circ+\cos 30^\circ$; (d) $\cos 17^\circ-\cos 13^\circ$;

(e) $\sin\frac{\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{20}$; (f) $\cos\frac{\pi}{18}+\cos\frac{\pi}{12}$.

117. (a) $\sin 25^\circ+\cos 55^\circ$; (b) $\cos 22^\circ-\sin 66^\circ$;

(c) $\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{5}$; (d) $\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}$.

118. (a) $\operatorname{tg} 10^\circ+\operatorname{tg} 20^\circ$; (b) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$;

(c) $\operatorname{tg} 12^\circ-\operatorname{ctg} 40^\circ$; (d) $\operatorname{ctg} 15^\circ-\operatorname{ctg} 25^\circ$.

119. (a) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$; (b) $\cos\alpha-\sin\alpha$.

120. (a) $\sin 16^\circ+\sin 24^\circ+\sin 40^\circ$; (b) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$.

Указание. Воспользоваться формулой $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

121. (a) $\cos 16^\circ+\sin 56^\circ+\sin 50^\circ$;

(b) $\cos(54^\circ+\alpha)+\cos(18^\circ-\alpha)+\sin(36^\circ+2\alpha)$.

Привести к виду, удобному для логарифмирования (задачи 122—128):

122. (a) $\frac{\sin 19^\circ-\sin 37^\circ}{\cos 65^\circ-\cos 47^\circ}$; (b) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

123. (a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$; (b) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}$.

124. (a) $\cos\alpha - \dfrac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{2\cos\alpha}$;

(b) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\sin 4\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$.

125. (a) $\dfrac{\cos 3\alpha - \cos 5\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha} - \dfrac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$;

(b) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha} - \dfrac{\cos(\alpha+\beta) + \cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha}$.

126. (a) $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$; (b) $\dfrac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$.

127. $\dfrac{\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}$. **128.** $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha}$.

Проверить справедливость равенств (задачи 129—130):

129. (a) $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \cos 20^\circ = 0$;
(b) $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ = 0$.

130. (a) $\dfrac{\cos 20^\circ - \cos 50^\circ}{\cos 31^\circ + \sin 11^\circ} = \dfrac{\sin 80^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 29^\circ - \sin 19^\circ}$;

(b) $\dfrac{\sin 22^\circ + \sin 8^\circ}{\sin 30^\circ} = \dfrac{\sin 12^\circ - \sin 2^\circ}{\cos 70^\circ - \cos 80^\circ}$.

Доказать тождества (задачи 131—133):

131. (a) $\dfrac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg}\alpha$;

(b) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; (c) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$.

132. $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}$.

133. $\dfrac{\cos\alpha + \cos 3\alpha - \sin 4\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha - \sin 4\alpha} = -\dfrac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}$.

Привести к виду, удобному для логарифмирования (задачи 134—142):

134. (a) $1 + \cos 2\alpha$; (b) $1 - \cos\frac{\alpha}{2}$.

135. (a) $1 + \cos 20^\circ$; (b) $1 - \sin 32^\circ$.

136. (a) $1 + \sin\frac{\alpha}{2}$; (b) $1 - \sin\frac{3\alpha}{2}$.

137. $\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$. **138.** $\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$.

139. (a) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$; (b) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha$.

140. $1 - \cos 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 3\alpha \sin 2\alpha$.

141. $(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)^2 + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)^2$.

142. $\cos^2\alpha - \sin^2 2\alpha$.

Указание. Воспользоваться формулами

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Доказать тождества (задачи 143—148):

143. $$\frac{2\sin\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = -\frac{2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

144. $$\frac{\sqrt{2} - \cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8}\right).$$

145. $$\frac{\left(\cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}.$$

146. $$\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{1 + \cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$

147. $$\cos^2\alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}.$$

148. $$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = \sin^2\beta.$$

Введением вспомогательного угла привести к виду, удобному для логарифмирования (задачи 149—155):

149. (a) $1 - \operatorname{tg}\alpha$; (b) $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha$.

150. (a) $\sqrt{2} + 2\cos\alpha$; (b) $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$.

151. (a) $1 - 4\sin^2\alpha$; (b) $3 - \operatorname{tg}^2 2\alpha$.

152. (a) $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$; (b) $3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$.

153. (a) $7\cos\alpha + 24\sin\alpha$; (b) $5\cos\alpha - 12\sin\alpha$.

154. $p^2 - q^2\sin^2\alpha$, $|p| < |q|$. **155.** $p^2\sin^2\alpha - q^2\cos^2\alpha$.

Для каждой из нижеследующих функций (задачи 156—160) найти:
1) значение независимой переменной в границах от 0 до π, при котором функция принимает наибольшее значение, и
2) соответствующее наибольшее значение функции (по таблице).

156. (a) $y = \sin 2x + \cos 2x$; (b) $y = \sin 3x - \cos 3x$.

157. (a) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$; (b) $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$.

158. (a) $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x$; (b) $y = 9\sin 3x - 40\cos 3x$.

159. (a) $y = \sin x + 2\cos x$; (b) $y = 4\sin 2x - \cos 2x$.

160. $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 14. Обратные тригонометрические функции

43. Определения и общий вид для значений обратных тригонометрических функций. Во многих задачах встречается необходимость находить не только значения тригонометрических функций по данному углу или дуге, но и, обратно, угол или дугу по заданному значению какой-нибудь тригонометрической функции.

Пусть, например, синус некоторого аргумента α (угла или дуги) равен a:

$$\sin \alpha = a.$$

Отсюда следует, что аргумент, синус которого есть a, равен α (раз аргументом является угол или дуга, то α выражено в радианах). Вместо такого словесного утверждения употребляют запись:

$$\alpha = \operatorname{Arcsin} a$$

(произносят: α равно арксинус a). Приставка Arc (сокращение от Arcus — дуга) неотделима от обозначения sin и вместе с ним образует символ, указывающий величину α, синус которого равен числу a, стоящему за символом Arcsin.

Подобным образом вводятся:

$\operatorname{Arccos} a$ (арккосинус a),

$\operatorname{Arctg} a$ (арктангенс a),

$\operatorname{Arcctg} a$ (арккотангенс a).

Запись $\operatorname{Arccos} a$ указывает величину аргумента (угла или дуги), косинус которого равен a; запись $\operatorname{Arctg} a$ — величину аргумента (угла или дуги), тангенс которого равен a; запись

$\operatorname{Arcctg} a$ — величину аргумента (угла или дуги), котангенс которого равен a. Относительно этих обозначений следует сделать те же замечания, которые были сделаны относительно обозначения $\operatorname{Arcsin} a$.

Каждому (возможному) значению a соответствуют значения $\operatorname{Arcsin} a$, $\operatorname{Arccos} a$, $\operatorname{Arctg} a$, $\operatorname{Arcctg} a$, которые мы, следовательно, можем рассматривать как функции аргумента a. Эти функции называются *обратными тригонометрическими функциями*. Функции же $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ иногда называют *прямыми тригонометрическими функциями*.

Функции $\operatorname{Arcsin} a$ и $\operatorname{Arccos} a$ имеют смысл, только если $|a| \leqslant 1$, ибо значения синуса и косинуса любого угла по абсолютной величине не могут быть больше единицы. Что касается функций $\operatorname{Arctg} a$ и $\operatorname{Arcctg} a$, то они имеют смысл при любом a.

Выявим сейчас одну важную особенность обратных тригонометрических функций: *любому возможному значению аргумента соответствует много значений данной обратной тригонометрической функции*. Эта особенность называется *многозначностью*. (Прямые же тригонометрические функции *однозначны*: каждому значению аргумента соответствует лишь одно значение функции.)

Мы обнаружим многозначность, находя для каждой обратной тригонометрической функции в отдельности общий вид ее значений, соответствующих данному значению аргумента.

Арксинус. Пусть известно, что

$$\operatorname{Arcsin} a = \alpha.$$

Это значит, по определению, что $\sin \alpha = a$. Но тогда в силу периодичности и $\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = a$, где k — произвольное целое число. Отсюда сразу следует:

$$\operatorname{Arcsin} a = \alpha + k \cdot 2\pi = \alpha + 2k\pi. \qquad (1_1)$$

Кроме того, в согласии с формулами приведения (п. 21)

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = a.$$

Поэтому

$$\operatorname{Arcsin} a = \pi - \alpha$$

и в силу периодичности

$$\operatorname{Arcsin} a = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi = -\alpha + (2k + 1)\pi. \qquad (1_2)$$

Мы видим, что если известен один угол α, синус которого равен данному числу a, то всякий угол одного из двух ви-

дов $\alpha + 2k\pi$ и $-\alpha + (2k+1)\pi$ имеет синус, равный тому же числу a. Два выражения $\alpha + 2k\pi$ и $-\alpha + (2k+1)\pi$ можно заменить одним, если заметить, что в первом из них множителем при π служит произвольное четное число, а во втором — произвольное нечетное число. Очевидно, выражение $(-1)^n\alpha + n\pi$, где n — любое целое число, соединяет в себе оба предыдущих выражения (1_1) и (1_2). Именно, при n четном оно обращается в первое из них, а при n нечетном — во второе.

Таким образом:

$$\operatorname{Arcsin} a = (-1)^n \alpha + n\pi, \tag{1}$$

где α — какой-нибудь угол, синус которого равен a, а n — целое число (положительное или отрицательное) или нуль. Правая часть формулы (1) дает нам общий вид углов (дуг), имеющих данный синус.

Пример. Так как $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то

$$\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2} = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi.$$

Арккосинус. Если известно, что

$$\operatorname{Arccos} a = \alpha,$$

т. е. что $\cos\alpha = a$, то и $\cos(\alpha + n\cdot 2\pi) = a$, а значит,

$$\operatorname{Arccos} a = \alpha + 2n\pi.$$

Далее, в силу четности косинуса (п. 18)

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha = a,$$

и поэтому

$$\operatorname{Arccos} a = -\alpha + 2n\pi.$$

Итак, если α — какой-нибудь угол, косинус которого равен данному числу a, то всякий угол одного из двух видов $\alpha + 2n\pi$ и $-\alpha + 2n\pi$ имеет косинус, равный тому же числу a.

Таким образом:

$$\operatorname{Arccos} a = \pm\alpha + 2n\pi, \tag{2}$$

где α — какой-нибудь угол, косинус которого равен a, а n — целое число (положительное или отрицательное) или нуль. Правая часть формулы (2) дает нам общий вид углов (дуг), имеющих данный косинус.

Пример. Так как $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, то

$$\operatorname{Arccos}\frac{1}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi.$$

Арктангенс. Пусть известно, что

$$\operatorname{Arctg} a=\alpha.$$

Значит, $\operatorname{tg}\alpha=a$ и в силу периодичности $\operatorname{tg}(\alpha+n\pi)=a$. Поэтому наряду со значением, равным α, $\operatorname{Arctg} a$ равен также любому углу (дуге) вида $\alpha+n\pi$. Таким образом:

$$\operatorname{Arctg} a=\alpha+n\pi, \tag{3}$$

где α — какой-нибудь угол, тангенс которого равен a, а n — целое число (положительное или отрицательное) или нуль. Правая часть формулы (3) дает нам общий вид углов (дуг), имеющих данный тангенс.

Пример. Так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, то

$$\operatorname{Arctg} 1=\frac{\pi}{4}+n\pi,$$

Арккотангенс. Пусть известно, что

$$\operatorname{Arcctg} a=\alpha.$$

Таким же образом, как и в случае арктангенса, убеждаемся, что

$$\operatorname{Arcctg} a=\alpha+n\pi, \tag{4}$$

где α — какой-нибудь угол, котангенс которого равен a, а n — целое число (положительное или отрицательное) или нуль. Правая часть формулы (4) дает нам общий вид углов (дуг), имеющих данный котангенс.

Пример. Так как $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$, то

$$\operatorname{Arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}+n\pi.$$

44. Главные значения обратных тригонометрических функций. Для того чтобы найти все значения обратной тригонометрической функции, достаточно знать только одно ее значение (п. 43). Другие ее значения получаются тогда по формулам (1) — (4).

Рассмотрим каждую из обратных тригонометрических функций в отдельности.

I. Arcsin a. Среди всех значений $\operatorname{Arcsin} a$ особо выделим то, которое заключено между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Оно называется *главным значением* $\operatorname{Arcsin} a$ и обозначается так: $\arcsin a$.

Так как при увеличении угла от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ синус увеличивается от -1 до $+1$, то каждому значению a, заключенному между -1 и $+1$, соответствует один угол, заключенный между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен данному значению a. (Это наглядно показано в п. 46, где рассматривается график арксинуса.)

Покажем, как найти $\arcsin a$ по данному значению аргумента a, $|a| \leqslant 1$. Пусть a — число положительное или нуль; тогда в первой четверти, т. е. между 0 и $\frac{\pi}{2}$, существует единственный угол α, для которого $\sin \alpha = a$. Это α и будет искомым главным значением $\operatorname{Arcsin} a$, т. е.

$$\arcsin a = \alpha.$$

Для отыскания α можно использовать (в обратном направлении) таблицу натуральных значений синуса, составленную для углов первой четверти.

Пусть теперь a — число отрицательное; тогда $-a$ — число положительное, и мы можем написать, что

$$\arcsin(-a) = \alpha,$$

где $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; отсюда $-a = \sin \alpha$ и, в силу нечетности синуса, $\sin(-\alpha) = a$. Так как $-\alpha$ заключено между 0 и $-\frac{\pi}{2}$, то $-\alpha$ и является искомым главным значением $\operatorname{Arcsin} a$:

$$\arcsin a = -\alpha.$$

Главное значение $\arcsin a$ *есть наименьшее по абсолютной величине значение* $\operatorname{Arcsin} a$ *при любом* a, $|a| \leqslant 1$.

Это значение особенно просто находится по таблице значений синуса для острых углов. Этим и объясняется название: *главное значение*.

В соответствии с формулой (1) имеем:

$$\operatorname{Arcsin} a = (-1)^n \arcsin a + n\pi.$$

Пример. Найдем $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)$. Так как $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ $\left(\text{потому что } \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\right)$, то $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$ и, значит,

$$\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+n\pi=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi=\left[\frac{(-1)^{n+1}}{6}+n\right]\pi.$$

II. Arccos a. Среди всех значений $\operatorname{Arccos} a$ особо выделяется то, которое заключено между 0 и π. Оно называется *главным значением* $\operatorname{Arccos} a$ и обозначается так: $\arccos a$.

Так как при увеличении угла от 0 до π косинус уменьшается от 1 до -1, то каждому значению a, заключенному между -1 и 1, соответствует один угол, заключенный между 0 и π, косинус которого равен данному значению a. (Это ясно показано в п. 47, где рассматривается график арккосинуса.)

Покажем, как найти $\arccos a$ по данному значению аргумента a, $|a|\leqslant 1$. Пусть a — число положительное или нуль; тогда в первой четверти, т. е. между 0 и $\frac{\pi}{2}$, существует единственный угол α, для которого $\cos\alpha=a$. Это α и будет искомым главным значением, т. е.

$$\arccos a=\alpha.$$

Для отыскания α можно использовать (в обратном направлении) таблицу натуральных значений косинуса, составленную для углов первой четверти.

Пусть теперь a — число отрицательное; тогда $-a$ — число положительное, и мы можем найти $\arccos(-a)=\alpha$, где $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$; отсюда $-a=\cos\alpha$. Ввиду того, что косинус не является нечетной функцией, мы не можем поступить как в случае арксинуса. Воспользуемся здесь формулой приведения: $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-(-a)=a$. Так как α заключено между 0 и $\frac{\pi}{2}$, то $\pi-\alpha$ заключено между $\frac{\pi}{2}$ и π и, следовательно, $\pi-\alpha$ является искомым главным значением $\operatorname{Arccos} a$:

$$\arccos a=\pi-\alpha.$$

Ясно, что для $\operatorname{Arccos} a$ нельзя выбрать главное значение заключенным между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ (аналогично случаю $\operatorname{Arcsin} a$), ибо тогда не существовало бы главного значения $\operatorname{Arccos} a$ при отрицательном a. Приведенное же определение главного

значения $\operatorname{Arccos} a$ позволяет найти его, причем единственным образом, при любом a, $|a| \leqslant 1$.

Главное значение $\arccos a$ *есть наименьшее положительное значение* $\operatorname{Arccos} a$ *при любом* a, $|a| \leqslant 1$.

Это значение особенно просто находится по таблице значений косинуса для острых углов. Этим и объясняется название: *главное значение*.

В соответствии с формулой (2) имеем:

$$\operatorname{Arccos} a = \pm \arccos a + 2n\pi.$$

Пример. Найдем $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$. Так как $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ $\left(\text{потому что } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right)$, то $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ и, значит,

$$\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{2}{3}\pi + 2n\pi = \left(\pm\frac{2}{3} + 2n\right)\pi.$$

III. Arctg a. *Главным значением* $\operatorname{Arctg} a$ (a — произвольное число) называется то его значение, которое заключено между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$; оно обозначается так: $\operatorname{arctg} a$.

Так как при увеличении угла от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ тангенс увеличивается, принимая любое (отрицательное, нулевое, положительное) значение, то каждому значению a соответствует один угол, заключенный между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен данному значению a. (Это мы с большой отчетливостью увидим в п. 48, где будет рассмотрен график арктангенса.)

Отыскание $\operatorname{arctg} a$ по данному значению аргумента a в таблицах совершенно аналогично отысканию $\arcsin a$.

Главное значение $\operatorname{arctg} a$ *есть наименьшее по абсолютной величине значение* $\operatorname{Arctg} a$ *при любом* a.

Это значение особенно просто находится по таблице значений тангенса для острых углов.

В соответствии с формулой (3) имеем:

$$\operatorname{Arctg} a = \operatorname{arctg} a + n\pi.$$

Пример. Найдем $\operatorname{Arctg}(-1)$. Так как $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ $\left(\text{потому что } \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1\right)$, то $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ и, значит,

$$\operatorname{Arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} + n\pi = \left(-\frac{1}{4} + n\right)\pi.$$

IV. Arcctg a. *Главным значением* Arcctg a (a — произвольное число) называется то его значение, которое заключено между 0 и π; оно обозначается так: arcctg a.

Так как при увеличении угла от 0 до π котангенс уменьшается, принимая любое (положительное, нулевое, отрицательное) значение, то каждому значению a соответствует один угол, заключенный между 0 и π, котангенс которого равен данному значению a. (Это отчетливо будет видно в п. 49, где рассматривается график арккотангенса.)

Отыскание arcctg a по данному значению аргумента a совершенно аналогично отысканию arccos a.

Главное значение arcctg a *есть наименьшее положительное значение* Arcctg a *при любом* a.

Это значение особенно просто находится по таблице значений котангенса для острых углов.

В соответствии с формулой (4) имеем:

$$\text{Arcctg}\, a = \text{arcctg}\, a + n\pi.$$

Пример. Найдем Arcctg (-1). Так как arcctg $1 = \frac{\pi}{4}$ $\left(\text{потому что } \text{ctg}\frac{\pi}{4} = 1\right)$, то arcctg $(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$ и, значит,

$$\text{Arcctg}\,(-1) = \frac{3}{4}\pi + n\pi = \left(\frac{3}{4} + n\right)\pi.$$

§ 15. Изменения обратных тригонометрических функций.

45. Общее понятие обратной функции. Прежде чем обратиться к изучению характера изменения обратных тригонометрических функций, обратимся к общему понятию обратной функции.

Пусть дана функциональная зависимость между двумя переменными величинами x и y. Обычно выбор одной из них в качестве независимой переменной (аргумент) может быть сделан вполне произвольно, по нашему усмотрению. Если, скажем, x выбрана аргументом (независимой переменной), то функцией будет y; обратно: если в силу каких-нибудь соображений целесообразнее считать аргументом y (т. е. выбирать значения y по нашему усмотрению), то функцией (зависимой переменной) будет x.

Однако y как функция x выражается, вообще говоря, иначе, чем x как функция y. Эти две функции называются

взаимно обратными. Разъясним понятие взаимной обратности двух функций на примере.

Пусть x и y находятся между собой в такой зависимости, что значение y получается из соответствующего значения x возведением последнего в квадрат. Такую зависимость можно выразить равенством

$$y = x^2. \tag{5}$$

Здесь y — функция, явно представленная через аргумент x.

Ту же самую зависимость можно выразить, очевидно, и таким равенством:

$$x = \pm\sqrt{y}. \tag{6}$$

Это только другая запись предыдущего равенства. Считая здесь y независимой переменной, замечаем, что x как функция выражается через свой аргумент (y) иначе, чем y как функция своего аргумента (x). Первая функция ($y = x^2$) определяется тем, что для получения ее значения нужно значение независимой переменной **возвести в квадрат**; вторая же функция ($x = \pm\sqrt{y}$) определяется тем, что для получения ее значения нужно из значения независимой переменной **извлечь квадратный корень**. Две функции, из которых одна есть квадрат аргумента, а вторая — корень квадратный из аргумента, и являются взаимно обратными.

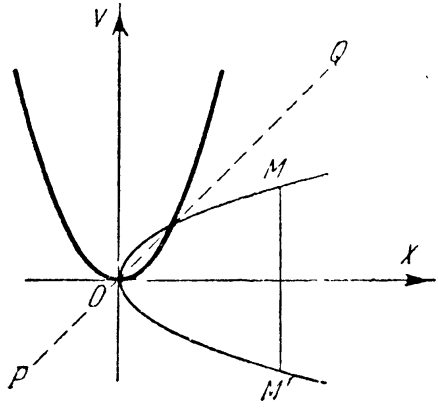
Обозначим независимую переменную в равенстве (6), как обычно принято, через x, а функцию — через y (т. е. в равенстве $x = \pm\sqrt{y}$ поменяем местами x и y). Тогда мы будем иметь два таких выражения для наших взаимно обратных функций:

$$y = x^2 \quad \text{и} \quad y = \pm\sqrt{x}.$$

График одной из взаимно обратных функций легко получить по графику другой. Покажем это на рассмотренном примере. Графиком функции $y = x^2$ служит, как мы знаем, парабола (жирная линия на черт. 38). Она же является графиком функции $x = \pm\sqrt{y}$ (ибо последнее равенство только своим видом отличается от равенства $y = x^2$). Но если заменить y на x, а x на y, то мы получим функцию $y = \pm\sqrt{x}$, график которой в той же системе осей должен быть, очевидно, так расположен относительно оси OX, как график функции $x = \pm\sqrt{y}$ относительно оси OY. Таким образом, сразу находим график функции $y = \pm\sqrt{x}$ (тонкая линия на черт. 38).

Легко видеть, что он может быть вычерчен по графику функции $y = x^2$ при помощи простого перегибания чертежа по биссектрисе PQ первого и третьего углов между осями OX и OY.

Такой автоматический способ вычерчивания графика обратной функции является вполне общим. *В одной и той же системе осей графики двух любых взаимно обратных функций* (с одинаково обозначенными аргументами) *совмещаются между собой, если чертеж перегнуть по биссектрисе первого и третьего углов между осями.*



Черт. 38.

Рассмотрим теперь, как отражается на графике функции свойство ее однозначности. Если каждому значению x соответствует одно значение y, то прямая, перпендикулярная к оси OX, может пересекать график функции не больше чем в одной точке. В случае же многозначности функции прямая, перпендикулярная к оси OX, может пересекать график больше чем в одной точке.

Так, например, функция $y = x^2$ — однозначная и каждая прямая, перпендикулярная к оси OX, пересекает параболу — график функции — только в одной точке. Функция же $y = \pm\sqrt{x}$ (обратная первой) — двузначная (каждому положительному значению x соответствуют два значения y: одно положительное, другое отрицательное) и прямая, перпендикулярная к оси OX, не пересекает график функции $y = \pm\sqrt{x}$, если она расположена левее оси OY, или пересекает его в двух точках M и M' (черт. 38), если она расположена правее оси OY: одна из этих точек находится над осью OX, другая — под осью OX.

Из этого примера видно, что функция, обратная данной однозначной функции, может быть и многозначной.

Подойдем теперь с изложенной сейчас общей точки зрения к обратным тригонометрическим функциям.

46. Функция $y = \operatorname{Arcsin} x$ и ее график. Пусть дана тригонометрическая функция

$$y = \sin x.$$

Так как, по определению, y есть значение синуса угла (дуги)

в x радианов, то (см. п. 43)

$$x = \operatorname{Arcsin} y.$$

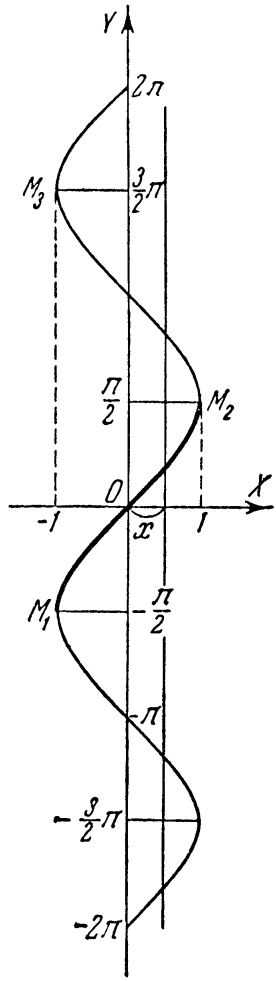
Рассматривая x как функцию y, мы приходим к функции, обратной функции $y = \sin x$, т. е. именно к обратной тригонометрической функции *арксинус*. Меняя местами x и y, получаем запись функции арксинус в обычном виде, когда аргумент и функция обозначены так же, как и в прямой функции:

$$y = \operatorname{Arcsin} x.$$

Функцией $\operatorname{Arcsin} x$ *называется функция, обратная функции* $\sin x$.

В равенстве $y = \operatorname{Arcsin} x$ переменные x и y могут выражать разнообразные величины. Так, y (значение функции) может выражать и длину, и время, и температуру и т. д. То же самое относится и к другим обратным тригонометрическим функциям, которые мы изучаем ниже. Но численное значение y мы определяем как радианную меру угла, синус которого равен x. График функции $y = \operatorname{Arcsin} x$ легко получить из графика функции $y = \sin x$ посредством приема, указанного в п. 45.

Перегнув черт. 29 (см. стр. 64) по биссектрисе первого и третьего углов между осями, получим график арксинуса, которым будет синусоида, «навертывающаяся» на ось OY (черт. 39) так же, как первоначальная синусоида — график синуса — «навертывалась» на ось OX.



Черт. 39.

Из черт. 39 видно, что прямая, перпендикулярная к оси OX, или вовсе не имеет с графиком общих точек, или имеет с ним бесчисленное множество общих точек. Это указывает на многозначность функции $y = \operatorname{Arcsin} x$. Ординаты y точек пересечения графика с прямой и будут значениями арксинуса, соответствующими тому значению аргумента, которое равно абсциссе x.

Выделим на графике функции $y = \operatorname{Arcsin} x$ такую его наибольшую часть, чтобы прямая, перпендикулярная к

оси OX и проходящая через любую точку отрезка от до $+1$ ($-1 \leqslant x \leqslant 1$), пересекала ее в одной и только в одной точке. Это можно сделать по-разному. Например, частью графика, удовлетворяющей поставленному условию, является дуга M_1M_2 (черт. 39). Такой частью может быть также дуга M_2M_3 и т. п. Каждая такая дуга служит графиком некоторой однозначной функции (ибо каждому значению x на отрезке от -1 до $+1$ соответствует одно значение функции).

Из всех возможных частей графика арксинуса, обладающих указанным свойством, остановимся на M_1M_2. Эта часть ближе находится к оси OX, чем любая другая часть (M_2M_3 и т. д.).

Линия M_1M_2 и является графиком главного значения $\operatorname{Arcsin} x$, т. е. графиком функции $y = \arcsin x$.

Главное значение арксинуса $y = \arcsin x$ является однозначной функцией x ($-1 \leqslant x \leqslant 1$), причем если $x > 0$, то и $\arcsin x > 0$, если $x = 0$, то и $\arcsin x = 0$, если $x < 0$, то и $\arcsin x < 0$. Возрастание функции $y = \arcsin x$ графически проявляется в том, что точка, двигаясь слева направо вдоль линии M_1M_2, поднимается.

Заметим еще, что $y = \arcsin x$ — *функция нечетная*:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

47. Функция $y = \operatorname{Arccos} x$ и ее график. Возьмем теперь тригонометрическую функцию

$$y = \cos x.$$

По определению, y есть значение косинуса угла (дуги) в x радианов. Значит (см. п. 43),

$$x = \operatorname{Arccos} y.$$

Считая x функцией, а y аргументом, приходим к функции, обратной функции $y = \cos x$, т. е. к обратной тригонометрической функции *арккосинус*. Меняя x и y местами, получим:

$$y = \operatorname{Arccos} x.$$

Функцией $\operatorname{Arccos} x$ *называется функция, обратная функции* $\cos x$.

Значениями функции $y = \operatorname{Arccos} x$ являются числа, измеряющие (обязательно в радианной мере) углы (дуги), косинус которых равен данному числу x.

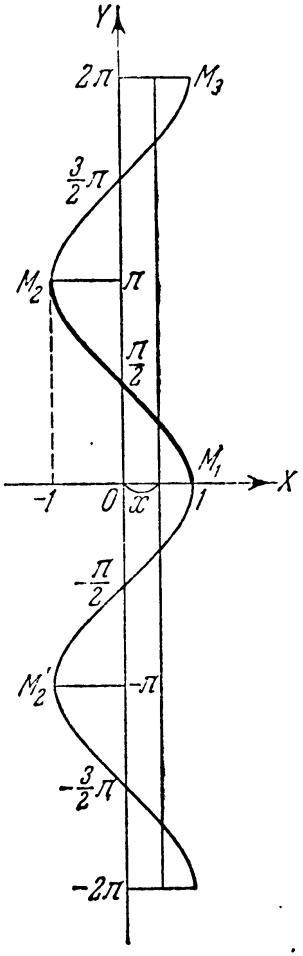
Перегибая черт. 30 (см. стр. 64) по биссектрисе первого и третьего углов между осями, получим график функции $y = \operatorname{Arccos} x$ (черт. 40).

Прямая, перпендикулярная к оси OX, или вовсе не имеет общих точек с графиком арккосинуса, или имеет с ним бесчисленное множество общих точек, в чем графически и выражается многозначность функции $y = \operatorname{Arccos} x$.

Выделим на графике функции $y = \operatorname{Arccos} x$ такую его наибольшую часть, чтобы прямая, перпендикулярная к оси OX и проходящая через любую точку отрезка от -1 до $+1$ ($-1 \leqslant x \leqslant 1$), пересекала ее в одной и только в одной точке. Такими частями могут быть дуги M'_2M_1, M_1M_2, M_2M_3 и т. п. (черт. 40). Каждая из этих дуг служит графиком некоторой однозначной функции (ибо каждому значению x на отрезке от -1 до $+1$ соответствует одно значение функции).

Среди этих дуг две, а именно: M'_2M_1 и M_1M_2, расположены к оси OX ближе других; выберем, однако, дугу M_1M_2, учитывая, что ординаты всех ее точек положительны.

Линия M_1M_2 и является графиком главного значения $\operatorname{Arccos} x$, т. е. графиком функции $y = \arccos x$.



Черт. 40.

Главное значение арккосинуса $y = \arccos x$ является однозначной функцией x ($-1 \leqslant x \leqslant 1$), причем положительной для каждого x. Убывание функции $y = \arccos x$ графически выражается в том, что точка графика, передвигаясь слева направо, опускается.

48. Функция $y = \operatorname{Arctg} x$ и ее график. Пусть дана тригонометрическая функция

$$y = \operatorname{tg} x.$$

По определению, y есть значение тангенса угла (дуги) в x радианов. Значит (см. п. 48),

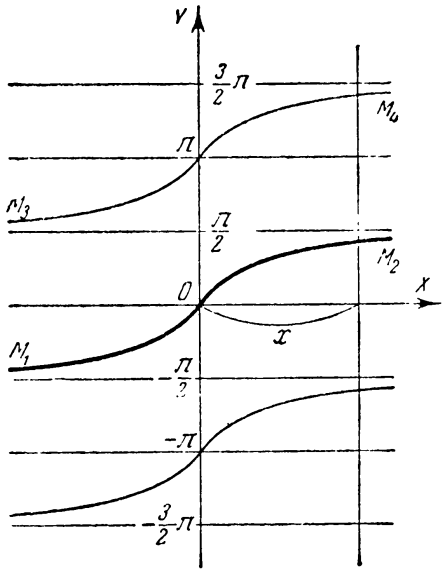
$$x = \operatorname{Arctg} y.$$

Считая x функцией от y, получаем функцию, обратную функции $y = \operatorname{tg} x$, т. е. обратную тригонометрическую функцию *арктангенс*. Меняя x и y местами, придем к функции

$$y = \operatorname{Arctg} x.$$

Функцией $\operatorname{Arctg} x$ *называется функция, обратная функции* $\operatorname{tg} x$.

Значениями функции $y = \operatorname{Arctg} x$ являются числа, измеряющие (обязательно в радианной мере) углы (дуги), тангенс которых равен данному числу x.



Черт. 41.

Если черт. 32 (см. стр. 67) перегнуть по биссектрисе первого и третьего углов между осями, то мы получим график функции $y = \operatorname{Arctg} x$ (черт. 41).

Всякая прямая, перпендикулярная к оси OX, пересекает график $\operatorname{Arctg} x$ в бесчисленном множестве точек, в чем графически и выражается многозначность функции $y = \operatorname{Arctg} x$.

График функции

$$y = \operatorname{Arctg} x$$

(черт. 41) состоит из отдельных ветвей M_1M_2, M_3M_4 и т. п., каждая из которых служит графиком некоторой однозначной функции (ибо каждому значению x соответствует одно значение функции).

Выделим ветвь M_1M_2; она расположена ближе к оси OX, чем другие ветви (M_3M_4 и т. д.). Линия M_1M_2 и является графиком главного значения $\operatorname{Arctg} x$, т. е. графиком функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Главное значение арктангенса $y = \operatorname{arctg} x$ является однозначной функцией x, причем если $x > 0$, то $\operatorname{arctg} x > 0$, если $x = 0$, то и $\operatorname{arctg} x = 0$, если $x < 0$, то и $\operatorname{arctg} x < 0$. Возрастание функции $y = \operatorname{arctg} x$ ясно видно из графика (черт. 41). Функция $y = \operatorname{arctg} x$ *нечетная*:

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

49. Функция $y = \text{Arcctg}\, x$ и ее график. Наконец, возьмем функцию

$$y = \text{ctg}\, x.$$

По определению, y есть значение котангенса угла (дуги) в x радианов. Поэтому (см. п. 43)

$$x = \text{Arcctg}\, y.$$

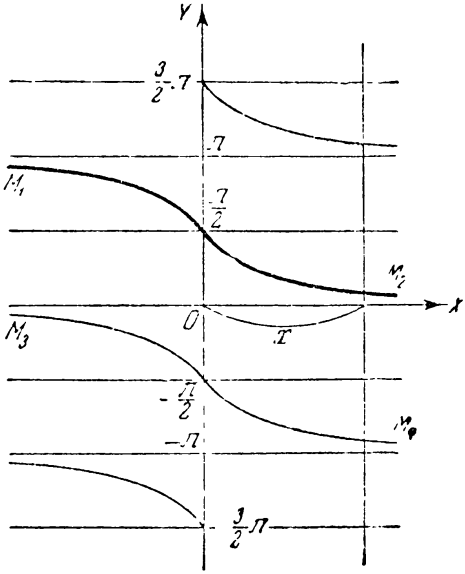
Рассматривая x как функцию y, мы приходим к функции, обратной функции $y = \text{ctg}\, x$, т. е. к обратной тригонометрической функции *арккотангенс*. Меняя x и y местами, получим функцию:

$$y = \text{Arcctg}\, x.$$

Функцией $\text{Arcctg}\, x$ *называется функция, обратная функции* $\text{ctg}\, x$.

Перегибая черт. 33 (см. стр. 68) по биссектрисе первого и третьего углов между осями, получим график функции $y = \text{Arcctg}\, x$ (черт. 42).

Всякая прямая, перпендикулярная к оси OX, пересекает график функции $\text{Arcctg}\, x$ в бесчисленном множестве точек, в чем графически выражается многозначность функции $y = \text{Arcctg}\, x$.



Черт. 42.

График функции $y = \text{Arcctg}\, x$ (черт. 42) состоит из отдельных ветвей M_1M_2, M_3M_4 и т. п., каждая из которых служит графиком некоторой однозначной функции (ибо каждому значению x соответствует одно значение функции).

Среди этих ветвей две, а именно: M_1M_2 и M_3M_4, расположены к оси OX ближе других; мы выберем M_1M_2, так как ординаты ее точек положительные. Линия M_1M_2 и является графиком главного значения $\text{Arcctg}\, x$, т. е. графиком функции $y = \text{arcctg}\, x$.

Главное значение арккотангенса $y = \text{arcctg}\, x$ является однозначной функцией x, причем положительной для каждого x. Убывание функции $y = \text{arcctg}\, x$ очень ясно обнаруживается из графика (черт. 42).

§ 16. Преобразования обратных тригонометрических функций

50. Простейшие преобразования. Рассмотрим некоторые простейшие соотношения между тригонометрическими и обратными тригонометрическими функциями.

1) Возьмем выражение $\sin(\arcsin x)$. Обозначим его через y:

$$y = \sin(\arcsin x).$$

Отсюда

$$\arcsin x = \arcsin y$$

и, значит, $y = x$.

Итак,

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

Этот результат делается совершенно понятным, если внимательно присмотреться к выражению в левой части. Действительно, оно представляет синус некоторого угла, именно равного $\arcsin x$, т. е. такого, синус которого равен x. В самой этой фразе заключен ответ.

Точно так же

$$\cos(\arccos x) = x, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$$

Равенства $\sin(\arcsin x) = x$ и $\cos(\arccos x) = x$ имеют смысл лишь при $|x| \leqslant 1$.

2) Преобразуем выражение $\sin(\arccos x)$. Применяя известную формулу, получим:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - [\cos(\arccos x)]^2},$$

в силу предыдущего, $\cos(\arccos x) = x$ и, значит,

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Точно так же

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Без особых объяснений должны быть понятны равенства:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)} = \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{x}.$$

3) Возьмем выражение $\operatorname{Arcsin}(\sin x)$. Обозначим его через y:

$$y = \operatorname{Arcsin}(\sin x).$$

Отсюда

$$\sin x = \sin y$$

и, значит, имеется такое значение y, которое равно x. Общим же ответом, как мы знаем, будет:

$$\operatorname{Arcsin}(\sin x) = (-1)^n \cdot x + n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Точно так же

$$\operatorname{Arccos}(\cos x) = \pm x + 2n\pi; \quad \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} x) = x + n\pi;$$
$$\operatorname{Arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x + n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

4) Если в выражении $\operatorname{Arcsin}(\cos x)$ заменить $\cos x$ через $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то мы, очевидно, получим:

$$\operatorname{Arcsin}(\cos x) = (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Точно так же

$$\operatorname{Arccos}(\sin x) = \pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2).$$

5) В качестве очень интересного примера возьмем функцию, рассмотренную великим русским математиком П. Л. Чебышевым (1821—1894): $\cos(n \arccos x)$, где n — целое неотрицательное число. Докажем, что эта функция есть *многочлен n-й степени* относительно x, коэффициентом которого при старшей степени x, т. е. при x^n, служит число 2^{n-1}.

При $n = 1$, $n = 2$ это очевидно:

$$\cos(\arccos x) = x,$$
$$\cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Применим теперь метод полной математической индукции. Предположим, что наше утверждение справедливо до какого-нибудь n включительно; докажем, что при этом оно имеет место и для $n + 1$. Так как (п. 41)

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta,$$

то

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta - \cos(n-1)\theta.$$

Положим здесь $\theta = \arccos x$; тогда

$$\cos[(n+1)\arccos x] =$$
$$= 2\cos(\arccos x)\cos(n\arccos x) - \cos[(n-1)\arccos x] =$$
$$= 2x\cos(n\arccos x) - \cos[(n-1)\arccos x].$$

В силу сделанного допущения имеем:

$$\cos(n \arccos x) = 2^{n-1}x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots,$$

$$\cos[(n-1)\arccos x] = 2^{n-2}x^{n-1} + \ldots$$

Поэтому

$$\cos[(n+1)\arccos x] = 2^n x^{n+1} + 2a_1 x^n + \ldots - (2^{n-2}x^{n-1} + \ldots).$$

Отсюда видно, что $\cos[(n+1)\arccos x]$ действительно есть многочлен степени $n+1$, причем коэффициентом при x^{n+1} служит число 2^n, что и требовалось доказать. Ввиду того, что это предложение справедливо, для $n=1$ и $n=2$, оно справедливо, по доказанному, для любого n.

Многочлены $\cos(n \arccos x)$ обладают целым рядом замечательных свойств, изучаемых в высшей математике. Эти многочлены, разделенные на 2^{n-1}, называются *многочленами Чебышева.*

Многочленами Чебышева 2-го рода называются функции $\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x)$, которые являются, как это доказывается аналогично предыдущему, многочленами относительно x степени $n-1$.

51. Дальнейшие преобразования. Естественно, что формулы, связывающие между собой тригонометрические функции, приводят к формулам, связывающим между собой обратные тригонометрические функции.

1) Докажем, что

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Положим $\arcsin x = \alpha$, $\arccos x = \beta$. Отсюда $x = \sin\alpha$, $x = \cos\beta$ и, следовательно,

$$\sin\alpha = \cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

По условию

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \pi.$$

Из последних неравенств следует, что

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \beta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, имеем равенство синусов от двух углов, лежащих в первой положительной или в первой отрицательной четверти. Но это равенство может иметь место только в том

случае, если сами углы равны:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

откуда

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

или

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Справедливость этого равенства также легко усмотреть по графикам функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$.

2) Точно так же

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

3) Найдем формулу для суммы арксинусов:

$$\arcsin x + \arcsin y.$$

Положим $\alpha = \arcsin x$, $\beta = \arcsin y$. Тогда $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$.

Возьмем синус суммы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Подставляя сюда вместо $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ их выражения через x и y, получим:

$$\sin(\alpha + \beta) = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}.$$

Перед корнями берем знак плюс, так как в первой положительной и в первой отрицательной четверти косинус положителен (ведь рассматриваются главные значения!).

Значит,

$$\alpha + \beta = \arcsin x + \arcsin y = \\ = \arcsin\left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right),$$

если $\alpha + \beta$ (так же, как и α и β в отдельности) удовлетворяют неравенствам

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha + \beta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Если $\alpha + \beta$ выходит за эти границы, то нужно принять в расчет другие (неглавные) значения арксинуса. (Заметим, что при наших условиях $\alpha + \beta$ всегда удовлетворяет неравенствам $-\pi \leqslant \alpha + \beta \leqslant \pi$.)

4) В частности, при $x=y$ $\left(\text{если } -\frac{\pi}{4} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ находим:

$$2 \arcsin x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Подобным же образом читатель сам может вывести формулу для суммы арккосинусов.

5) Преобразуем сумму арктангенсов:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y.$$

Положим $\alpha = \operatorname{arctg} x$, $\beta = \operatorname{arctg} y$. Тогда $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$.

Возьмем тангенс суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Если сумма $\alpha+\beta$ (так же, как и α и β в отдельности) заключена между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, то

$$\alpha+\beta = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

В том случае, когда $\alpha+\beta$ выходит за указанные границы, необходимо обратиться к другим (неглавным) значениям арктангенса. (При наших условиях сумма $\alpha+\beta$ всегда заключена между $-\pi$ и π.)

6) В частности, при $x=y$ $\left(\text{если } -\frac{\pi}{4} \leqslant \operatorname{arctg} x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ находим:

$$2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}.$$

7) Меняя в формуле для суммы арктангенсов y на $-y$, получим:

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$$

при условии, что

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}.$$

8) Для иллюстрации применения выведенных формул приведем один интересный пример. Вычислим значение выражения

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Так как $\operatorname{arctg} \frac{1}{5} > \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$, то эта разность положительна. Покажем, что она меньше $\frac{\pi}{2}$. Действительно,

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} < 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} < 4 \cdot \frac{1}{5},$$

так как в первой четверти дуга меньше своего тангенса. Но в свою очередь $\frac{4}{5} < \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$; таким образом, для преобразования данной разности можно воспользоваться выведенными здесь формулами.

Прежде всего преобразуем первый член:

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = 2\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5}\right) = 2 \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{12}.$$

Снова применяя формулу удвоенного арктангенса, получим:

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \operatorname{arctg} \frac{120}{119}.$$

Итак,

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \operatorname{arctg} \frac{120}{119} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Воспользовавшись формулой для разности арктангенсов, найдем:

$$\operatorname{arctg} \frac{120}{119} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119 \cdot 239}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Окончательно приходим к любопытному результату:

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

По образцу примеров этого параграфа следует решать и другие задачи, связанные с преобразованием обратных тригонометрических функций.

§ 17. Тригонометрические уравнения

52. Определение. *Тригонометрическим уравнением называется равенство, содержащее неизвестную величину только под знаком тригонометрических функций и справедливое лишь при некоторых определенных значениях неизвестной.* Последние называются *корнями* уравнения. Иными словами, корнями тригонометрического уравнения являются значения неизвестной величины, которые удовлетворяют уравнению. В отличие от тригонометрических уравнений тригонометрические тождества удовлетворяются при всех значениях переменных величин, стоящих под знаками тригонометрических функций, для которых эти функции имеют смысл.

Решить тригонометрическое уравнение значит найти все его корни.

Мы будем рассматривать лишь некоторые простые типы тригонометрических уравнений. Решение их обычно сводится к отысканию значения одной какой-нибудь тригонометрической функции, аргументом которой служит выражение, содержащее неизвестную величину. По значению тригонометрической функции можно найти (посредством обратной тригонометрической функции) и значение ее аргумента.

Пусть, например, в результате преобразований мы получили следующее, равносильное заданному, простейшее тригонометрическое уравнение:

$$\sin(ax+b)=c, \quad \text{где } |c|\leqslant 1. \tag{7}$$

Оно решается сразу. Имеем:

$$ax+b=\operatorname{Arcsin} c=(-1)^n \arcsin c+n\pi$$
$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

откуда

$$x=\frac{1}{a}[-b+(-1)^n \arcsin c+n\pi] \tag{8}$$
$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Правая часть выражения (8) заключает в себе все корни уравнения (7). Придавая n значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, получим частные значения неизвестного x: $x_0, x_1, x_2, \ldots$

Отсюда видно, что исходное уравнение имеет бесчисленное множество корней. Если же $|c| > 1$, то решение уравнения невозможно: оно вовсе не имеет корней.

Обычно тригонометрическое уравнение или вовсе не имеет корней, или имеет их бесчисленное множество. (В противоположность этому алгебраические уравнения с одним неизвестным имеют лишь конечное число корней.)

Что касается методов, при помощи которых данное тригонометрическое уравнение приводится к уравнению простейшего вида, то они состоят в преобразованиях уравнения в равносильное. Наряду с этим используются тригонометрические тождества. Если в процессе решения уравнения производятся преобразования, которые могут приводить к новым корням, как, например, возведение обеих частей уравнения в квадрат, то необходимо учесть, какие новые, посторонние заданному уравнению корни появляются в результате этих преобразований.

53. Примеры уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$2\cos x + 1 = 0.$$

Здесь сразу имеем:

$$\cos x = -\frac{1}{2};$$

отсюда находим:

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2n\pi = \pm\frac{2}{3}\pi + 2n\pi$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пример 2 (пример на приведение к одному аргументу). Решить уравнение

$$\sin 2x = \sin^2 x.$$

Заменяя $\sin 2x$ через $2\sin x\cos x$, получим:

$$\sin x\,(2\cos x - \sin x) = 0.$$

Приравняв нулю каждый из двух множителей левой части, придем к двум уравнениям:

$$\sin x = 0 \quad \text{и} \quad 2\cos x - \sin x = 0.$$

Первое дает:

$$x = n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (9)$$

Второе после деления на $\cos x$ дает:

$$\operatorname{tg} x = 2,$$

откуда

$$x = \operatorname{arctg} 2 + n\pi \approx 1{,}11 + n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad (10)$$

(см. таблицу на стр. 57).

Формулы (9) и (10) и указывают корни исходного уравнения. В данном случае деление на $\cos x$ не приводит к потере корней, так как значения x, обращающие $\cos x$ в нуль, не являются корнями исходного уравнения.

Пример 3 (пример на приведение к одной функции). Решить уравнение

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

а) Рассмотрим сначала случай, когда $a \neq 0$. Для того чтобы заданное уравнение привести к уравнению, содержащему одну тригонометрическую функцию, разделим обе части на $\cos^2 x$ (мы не потеряем при этом корней данного уравнения, так как при $\cos x = 0$ левая часть не обращается в нуль). Получим уравнение

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Решая его относительно $\operatorname{tg} x$, найдем:

$$\operatorname{tg} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Отсюда видно, что условием возможности решения первоначального уравнения является неравенство:

$$b^2 \geqslant 4ac.$$

Если оно выполнено, то

$$x = \operatorname{arctg}\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

б) Пусть теперь $a = 0$. Тогда уравнение имеет вид:

$$\cos x\,(b \sin x + c \cos x) = 0.$$

Приравняв нулю каждый из двух множителей левой части, получим два уравнения:

$$\cos x = 0; \quad b \sin x + c \cos x = 0.$$

из них дает:

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Что касается второго, то при $b \neq 0$, деля на $\cos x$ (корни уравнения $\cos x = 0$ уже учтены), находим:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{c}{b},$$

откуда

$$x = -\operatorname{arctg}\frac{c}{b} + n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

При $b = 0$ мы приходим к прежним корням уравнения $\cos x = 0$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sin^2 x \operatorname{ctg} 2x = 0.$$

Заданное уравнение распадается на два уравнения:

$$\sin^2 x = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} 2x = 0.$$

Корни первого из этих уравнений ($x = n\pi$) нельзя, однако, считать корнями исходного уравнения, так как $\operatorname{ctg} 2x$ при $x = n\pi$ не существует. Корни же второго уравнения, именно:

$$x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

и являются искомыми корнями заданного уравнения.

Пример 5 (пример равенства двух одноименных тригонометрических функций). Решить уравнение

$$\sin 5x = \sin 4x.$$

Перенося $\sin 4x$ в левую часть и применив формулу для разности синусов, получим:

$$2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{9}{2}x = 0.$$

Следовательно, имеем два уравнения:

$$\sin\frac{x}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \cos\frac{9}{2}x = 0.$$

Далее находим:

$$\frac{x}{2} = n\pi, \quad \frac{9}{2}x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi,$$

и окончательно:

$$x = 2n\pi, \quad x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{4}{9}n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пример 6 (пример на введение вспомогательного аргумента; см. п. 42). Решить уравнение

$$a \sin x + b \cos x + c = 0.$$

Полагая

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\rho}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\rho},$$

получим:

$$a \sin x + b \cos x = \rho \sin(x + \varphi).$$

Таким образом, наше уравнение принимает вид:

$$\rho \sin(x + \varphi) + c = 0,$$

или

$$\sin(x + \varphi) = -\frac{c}{\rho},$$

т. е. вид, указанный в п. 52. Мы видим, что уравнение имеет корни, если $|c| \leqslant \rho$, т. е. если $c^2 \leqslant a^2 + b^2$.

В п. 54 будет изложен один общий метод, с помощью которого также может быть решено рассматриваемое уравнение.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x = a.$$

Это уравнение является частным случаем уравнения предыдущего примера, но решить его можно проще.

Заменив $\cos x$ через $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и используя формулу для суммы синусов, получим:

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin\frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом:

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a$$

и, следовательно,

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Очевидно, что полученное уравнение может иметь решения лишь при $\frac{|a|}{\sqrt{2}} \leqslant 1$, т. е. при $|a| \leqslant \sqrt{2}$. Если это условие выполнено, то

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{a}{\sqrt{2}} + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пример 8. Решить уравнение

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = \frac{\cos mx}{\cos x}. \tag{11}$$

После перенесения всех членов этого уравнения в левую часть и приведения к общему знаменателю получим:

$$\frac{\sin mx \cos x - \cos mx \sin x}{\sin x \cos x} = 0.$$

Числитель представляет собой синус разности аргументов mx и x, следовательно, окончательно приходим к уравнению

$$\frac{\sin (mx - x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin [(m-1)x]}{\sin x \cos x} = 0. \tag{12}$$

Дробь может быть равна нулю только при условии, что числитель равен нулю, если одновременно не обращается в нуль и знаменатель. Поэтому найдем прежде всего, при каких значениях x обращается в нуль знаменатель уравнения (12).

Пусть $\sin x \cos x = 0$ или $\frac{1}{2} \sin 2x = 0$, отсюда $2x = n\pi$, т. е. $x = \frac{n\pi}{2}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Теперь следует решить уравнение $\sin [(m-1)x] = 0$. Все корни этого уравнения, за исключением значений x, кратных $\frac{\pi}{2}$, будут удовлетворять заданному уравнению (11).

Решая уравнение $\sin [(m-1)x] = 0$, находим $(m-1)x = n\pi$, откуда

$$x = \frac{n}{m-1}\pi \quad \text{или} \quad x = \frac{2n}{m-1}\frac{\pi}{2} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Исследуя это решение, сразу исключаем $m = 1$; в этом случае уравнение (11) обращается в тождество:

$$\frac{\sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\cos x}.$$

При $m = 2$ и $m = 3$ получаем:

$$x = 2n \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad x = n \cdot \frac{\pi}{2};$$

все эти значения x кратны $\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, корнями уравнения (12) быть не могут, ибо обращают в нуль и числитель и знаменатель.

Таким образом, уравнение (11) при $m=2$, $m=3$ совсем не имеет решений.

Наконец, если m отлично от 1, 2 и 3, то все решения уравнения (11) заключены в формуле

$$x=\frac{2n}{m-1}\frac{\pi}{2},$$

где n может принимать значения ± 1, $\pm 2, \ldots$, кроме тех, которые обращают дробь $\frac{2n}{m-1}$ в целое число. Например, при $m=4$ $x=\frac{2n}{3}\frac{\pi}{2}$, где n — любое целое положительное или отрицательное число, но не кратное числу 3.

54. Один общий метод. Укажем общий метод, позволяющий решать *рациональные тригонометрические уравнения*. Так называются уравнения, у которых одна часть есть нуль, а другая часть представляет собой рациональное выражение относительно тригонометрических функций от одного и того же аргумента (см. п. 39); в простейшем случае этим аргументом служит неизвестная величина x.

Как известно (ср. формулы (24) на стр. 87), все тригонометрические функции от x рационально выражаются через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, а именно:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \operatorname{tg} x=\frac{2t}{1-t^2}, \tag{13}$$

где

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Если в данное рациональное тригонометрическое уравнение подставить вместо тригонометрических функций от x их выражения через t, то получим рациональное уравнение относительно t, из которого и найдем неизвестную величину t. Зная $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, мы найдем и x.

Пример. Решить уравнение

$$a\sin x+b\cos x+c=0 \tag{14}$$

(ср. пример 6 п. 53). Заменяя в уравнении (14) $\sin x$ и $\cos x$ выражениями через t, находим:

$$2a\frac{t}{1+t^2}+b\frac{1-t^2}{1+t^2}+c=0,$$

откуда

$$(c-b)t^2+2at+(c+b)=0. \qquad (15)$$

Мы получили квадратное уравнение относительно t при условии, что $b\neq c$. Решая его, найдем:

$$t=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-c^2+b^2}}{c-b}.$$

Отсюда снова видно, что неравенство $a^2+b^2\geqslant c^2$ является условием возможности решения первоначального уравнения. Если это условие выполнено, то

$$x=2\left(\operatorname{arctg}\frac{-a\pm\sqrt{a^2-c^2+b^2}}{c-b}+n\pi\right)\quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Если же $b=c$, то уравнение (14) следует решать непосредственно, так как квадратное уравнение (15) обращается в линейное, что сопровождается потерей корня.

Тогда из уравнения (14) имеем:

$$a\sin x+b(1+\cos x)=0,$$

т. е.

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2b\cos^2\frac{x}{2}=0,$$

откуда

$$\cos^2\frac{x}{2}\left(a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b\right)=0$$

и, значит,

$$\cos\frac{x}{2}=0,\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{b}{a}.$$

Находим:

$$x=(2n+1)\pi,\quad x=2\left(-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+n\pi\right)$$
$$(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Вторая из этих серий корней получается и из решения линейного уравнения, в которое обращается квадратное уравнение (15), при $b=c$, а первая серия корней при этом оказывается потерянной.

Вообще при подстановке в тригонометрическое уравнение t вместо $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ можно потерять корни $x=(2n+1)\pi$; при

этих значениях $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не существует. Поэтому, решая уравнение этим приемом, нужно проверить, не являются ли указанные значения корнями уравнения.

Решение уравнений по изложенному общему методу не всегда является наиболее простым. Часто какой-нибудь прием, специально приспособленный для данного уравнения, скорее приводит к цели, чем общий метод. Поэтому нужно стремиться искать специальный, наиболее короткий, простой и изящный прием для решения уравнения.

Если более удобный специальный прием не удается найти, следует обратиться к общему методу.

Задачи к главе IV

Выразить с помощью символов обратных тригонометрических функций угол (дугу) α из следующих равенств (задачи 1—3):

1. (a) $\sin 2\alpha = 0{,}7$; (b) $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$;

(c) $\operatorname{tg} 3\alpha = 3$; (d) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}$.

2. (a) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}1$; (b) $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{10}\right) = 0{,}85$;

(c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{8}$; (d) $\operatorname{ctg}(2\alpha - 1) = \sqrt{2}$.

3. (a) $\sin m\alpha = a$; (b) $\cos(m\alpha + b) = c$; (c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{p} - q\right) = r$.

Найти общий вид углов, имеющих данное значение тригонометрической функции (задачи 4—6):

4. (a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\sin\alpha = 1$; (c) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; (d) $\sin\alpha = 0$.

5. (a) $\cos\alpha = 0$; (b) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;

(c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; (d) $\cos\alpha = -1$.

6. (a) $\operatorname{tg}\alpha = -1$; (b) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$; (c) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$; (d) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$.

Пользуясь общими формулами, найти значения следующих обратных тригонометрических функций (задачи 7—9):

7. (a) $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (b) $\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2}$; (c) $\operatorname{Arcsin}(-1)$.

8. (a) $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$; (b) $\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}$; (c) $\operatorname{Arccos} 1$.

9. (a) $\operatorname{Arctg} 0$; (b) $\operatorname{Arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; (c) $\operatorname{Arctg}\sqrt{3}$.

10. Найти все значения $\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2}$, заключенные между числами -2π и 4π.

11. Найти все значения $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$, заключенные между числами 0 и 6π.

12. Найти все значения $\operatorname{Arctg}(-\sqrt{3})$, заключенные между числами -2π и 2π.

13. Найти все значения $\operatorname{Arcctg}(-1)$, заключенные между числами $-\pi$ и π.

Указать, для каких значений x имеет смысл каждая из следующих функций (задачи 14—15):

14. (a) $\operatorname{Arcsin}\frac{x}{3}$; (b) $\operatorname{Arcsin} 4x$; (c) $\operatorname{Arcsin} mx$, где $m > 0$.

15. (a) $\operatorname{Arcsin}(2x-1)$; (b) $\operatorname{Arcsin}(1-3x)$; (c) $\operatorname{Arcsin}\frac{x-1}{2}$.

16. Выразить x через y:

(a) $y = \operatorname{Arccos} 2x$; (b) $y = \operatorname{Arccos} x + \pi$;

(c) $y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}\frac{x}{2}$; (d) $y = \frac{1}{3}\operatorname{Arccos} x$;

(e) $y = \frac{\pi}{4} - 2\operatorname{Arcsin} x$; (f) $y = \frac{\pi - \operatorname{Arctg} x}{3}$;

(g) $y = 1 - 4\operatorname{Arcctg}\frac{x}{5}$; (h) $y = \frac{\pi}{8} - \arcsin\frac{x-1}{4}$.

17. Найти значения функции $y = \arcsin x$, если x имеет следующие значения: -1; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1.

18. Пользуясь таблицами, найти с точностью до 0,001 значения функции $y = \arcsin\frac{2x+3}{4}$, если x имеет следующие значения: -3; -2; -1; 0; $\frac{1}{2}$.

19. Пользуясь таблицами, найти с точностью до 0,001 значения функции $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} 3x$, если x имеет следующие значения: 0,1; $\frac{1}{3}$; 1; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $-0{,}5$; -1.

20. Найти значения функции $y = \arccos x - \operatorname{arctg} 2x$, если x имеет следующие значения: 0; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21. Выразить углы прямоугольного треугольника через его гипотенузу c и площадь S.

22. Выразить периметр сектора через его радиус R и радиус r вписанной в него окружности.

23. По графику функции $y = \arcsin x$ найти значения аргумента, при которых функция имеет следующие значения: $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 1; $-1{,}5$. Результаты сверить с таблицей.

24. Построить на одном чертеже графики функций $y = \arccos x$ и $y = \arccos \frac{x}{2}$; выяснить по чертежу, при каком значении аргумента разность

$$\arccos \frac{x}{2} - \arccos x$$

будет наибольшей, наименьшей, равна нулю.

25. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x \arcsin x$ в границах изменения x от $\frac{1}{2}$ до $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

26. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \arccos x + x^2$$

в границах изменения x от $-\frac{1}{2}$ до нуля.

27. Пользуясь графиками функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$, найти знак каждой из разностей:

(a) $\arccos 0{,}7 - \arccos 0{,}5$;

(b) $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) - \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$;

(c) $\arcsin(\sqrt{2} - 1) - \arcsin(\sqrt{5} - 2)$;

(d) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{12}\right) - \arccos\left(\sin\frac{\pi}{13}\right)$.

28. Не производя вычислений, найти знак каждого из отношений:

(a) $\dfrac{\arcsin 0{,}85 - \arcsin 0{,}8}{\arccos 0{,}85 - \arccos 0{,}8}$;

(b) $\dfrac{\pi - 2\arcsin 0{,}9}{\pi - 2\arccos(-0{,}1)}$;

(c) $\dfrac{\arcsin(-0{,}4) + \frac{\pi}{6}}{\arccos 0{,}6 - \frac{\pi}{3}}$.

29. Указать, какие из нижеследующих функций являются четными, какие нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

(a) $y = \arcsin x + 2\operatorname{arctg} x$; (b) $y = \arccos x + \operatorname{arctg} x$;

(c) $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$; (d) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} - x \arcsin x$.

Доказать тождества (задачи 30—32):

30. (a) $\sin(\arcsin x) = x$; (b) $\arccos(\cos x) = x$, если $0 \leqslant x \leqslant \pi$; (c) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

31. (a) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; (b) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

32. (a) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; (b) $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$, если $x \geqslant 0$; (c) $\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, если $x \geqslant 0$.

Вычислить (задачи 33—35):

33. (a) $\sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$; (b) $\sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right)$.

34. (a) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; (b) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$.

35. (a) $\cos\left[\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right]$; (b) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$.

Проверить справедливость следующих равенств (задачи 36 — 37):

36. (a) $\arcsin \frac{15}{17} = \arccos \frac{8}{17}$; (b) $\arcsin \frac{4}{5} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$.

37. (a) $\arcsin\left(-\frac{7}{25}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{7}{24}$;

(b) $\arccos\left(-\frac{9}{41}\right) = \pi - \arcsin \frac{40}{41}$.

Вычислить (задачи 38—45):

38. (a) $\arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$; (b) $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right)$,

(c) $\arcsin(\cos 1)$; (d) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2)$.

39. (a) $\arccos(\cos 2\pi)$; (b) $\arccos\left(-\cos \frac{36}{7}\pi\right)$;

(c) $\arccos\left[\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right]$; (d) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 0{,}7\,\pi)$.

40. $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{5}{13}\right)$. **41.** $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{4} - \operatorname{arcctg} 5\right)$.

42. $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{8}{15} - \arcsin \frac{8}{17}\right)$. **43.** $\operatorname{tg}\left[2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

44. $\cos\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \arccos \frac{3}{5}\right)$.

45. $\sin\left[2\left(\arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} - \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]$.

Проверить справедливость следующих равенств (задачи 46—

46. (a) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$; (b) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{9}+\operatorname{arcctg}\frac{4}{5}=\frac{3}{4}\pi$.

47. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\operatorname{arctg}\frac{16}{13}$.

48. $\arcsin\frac{7}{25}+\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25}=\arccos\frac{3}{5}$.

Доказать тождества (задачи 49—51):

49. $2\arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}=\arccos x$.

50. $\frac{1}{2}\arccos(2x^2-1)=\arccos x$, если $x\geqslant 0$.

51. $2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi$, если $x\geqslant 1$.

Убедиться в том, что указанные справа числа являются корнями соответствующего уравнения (задачи 52—54).

52. $\cos x+\cos 5x=1$; $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$.

53. $\sin 2x=\cos 3x$; $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{10}$, $-\frac{3\pi}{10}$.

54. $\operatorname{tg}\pi x=2\cos^2\pi x$; $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{4}$.

55. Можно ли считать число π корнем уравнения $\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$?

56. Можно ли считать число $\frac{\pi}{4}$ корнем уравнения

$$\cos 2x\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0?$$

57. Показать, что уравнения

$$\sin^2 2x-\sin^2 x=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin 3x\sin x=\frac{1}{2}$$

равносильны.

58. Можно ли считать равносильными уравнения

$$\operatorname{tg}x(1-2\cos x)(2+\sin x)=0 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}x(2+\sin x)=0?$$

59. Можно ли считать равносильными уравнения

$$(1+2\sin 3x)\operatorname{tg}x=0 \quad \text{и} \quad (1+2\sin 3x)\frac{1}{\operatorname{ctg}x}=0?$$

60. Доказать, что уравнения

$$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = 3 \quad \text{и} \quad 2 \operatorname{ctg}^2 x - 3 \operatorname{ctg} x + 1 = 0$$

равносильны.

61. Показать, что все корни уравнения $\sin x = 0$ являются корнями уравнения $\sin 5x = 0$. Можно ли считать эти уравнения равносильными?

Решить уравнения (задачи 62—79):

62. $2 \sin x - 1 = 0$. **63.** $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$.

64. $3 \operatorname{tg}(x + 15°) - \sqrt{3} = 0$. **65.** $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

66. $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{3} = 0$. **67.** $\operatorname{ctg} 5x = 0$.

68. $\operatorname{tg} \frac{2}{3} x - 1 = 0$. **69.** $2 \sin \frac{x+1}{4} + 1 = 0$.

70. $\sqrt{3} \operatorname{tg}(3x + 18°) + 3 = 0$. **71.** $4 \sin^2 4x - 3 = 0$.

72. $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$. **73.** $\operatorname{tg}^2 3x = 2 \operatorname{tg} 3x$.

74. $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + 3 \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) - 4 = 0$.

75. $4 \cos^2 x + \sin x = 1$. **76.** $\operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} x = 6$.

77. $2 \operatorname{ctg} 3x + \operatorname{tg} 3x + 3 = 0$.

78. $m \operatorname{tg} x + n \operatorname{ctg} x = 2$. При каком соотношении между величинами m и n существует решение уравнения?

79. $a \sin^2 x + b \cos^2 x = c$. При каком соотношении между величинами a, b и c существует решение уравнения?

80. Сумма двух равных высот равнобедренного треугольника равна третьей высоте. Найти углы треугольника.

81. Синусы углов прямоугольного треугольника составляют геометрическую прогрессию. Найти углы треугольника.

82. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, равна разности проекций катетов на гипотенузу. Найти углы треугольника.

Решить уравнения (задачи 83—99):

83. $\sin x (1 + 2 \cos x) = 0$. **84.** $\sin 2x \cos 3x = 0$.

85. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

86. $\cos 5x (1 + \cos 2x) = 0$. **87.** $\operatorname{ctg} x - \cos x = 1 - \sin x$.

88. $1 + \sin x \cos 3x + \sin x + \cos 3x = 0$.

89. $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 - \operatorname{tg} x$. **90.** $\sin 3x \operatorname{ctg} x = 0$.

91. $\sin 3x = \cos 3x$. **92.** $\sin^2 3x = 3 \cos^2 3x$.

93. $5 \cos x + 2 \sin x = 5 \cos x \cos 2x + 2 \sin x \cos 2x$.

94. $\sin x \operatorname{tg} x + \cos x \operatorname{ctg} x = \sin x + \cos x$.

95. $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 0$.

96. $3 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 1$.

97. $\frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x - 2\cos x} = 3.$

98. $\frac{2\sin^2 x - 4\cos^2 x}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 6\cos^2 x} = 1.$

99. $\frac{a^2\sin^2 x + b\cos^2 x}{b^2\sin^2 x + a\cos^2 x} = 1.$ При каком соотношении между величинами a и b существует решение уравнения?

100. Дан угол $MON = 60°$. На его стороне OM взята произвольная точка A, а на стороне ON точка B так, что $OA = 2OB$. Под каким углом к стороне ON следует провести внутри данного угла полупрямую OL, чтобы она была равноудалена от точек A и B?

101. Однородный стержень AB согнут в точке C под прямым углом так, что $AC = 4$ *см* и $BC = 10$ *см*, и подвешен в точке C на нити. Найти угол между стороной AC и горизонтом при равновесии стержня.

Решить уравнения (задачи 102—121):

102. $\sin 3x\cos x = \cos 3x\sin x.$

103. $\cos 7x\cos 3x = \cos 4x.$

104. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos 2x + \sin(2x - \pi)\sin x = 0.$

105. $\sin\frac{3\pi - x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos(3x - \pi)\cos\frac{3\pi + x}{2}.$

106. $\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

107. $\sin x\cos x = \frac{1}{4}.$

108. $\sin(34° + x)\cdot\sin(56° - x) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$

109. $\cos^4 x - \sin^4 x = 1.$

110. $\cos^2(x + 30°) - \sin^2(x + 30°) = -\frac{1}{2}.$

111. $\sin\left(x + \frac{\pi}{10}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5} - x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$

112. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos x.$

113. $1 - \operatorname{tg}^2 x = 2\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x.$

114. $2\cos 2x = 7\sin x.$

115. $\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 0.$

116. $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2.$

117. $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = 0.$

118. $\sin 4x = 2\cos^2 x - 1.$

119. $\sin x\cos x\cos 2x = \frac{1}{8}.$

120. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x.$

121. $2 - \sin\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}.$

Указание. Воспользоваться формулой $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}.$

122. В квадрат вписан другой квадрат. Один из острых углов между сторонами квадратов равен α. При каком значении угла α площадь вписанного квадрата составит $\frac{2}{3}$ площади другого квадрата?

123. В равнобедренном треугольнике через вершину угла при основании и центр описанной окружности проведена прямая. Отношение m отрезка этой прямой, заключенного внутри треугольника, к его боковой стороне равно 1,2. Найти углы треугольника. Исследовать задачу: указать, в каких границах должна заключаться величина m.

Решить уравнения (задачи 124—156):

124. $\sin 2x = \sin 3x$.

125. $\cos(2x + 15°) = \cos(4x - 15°)$.

126. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + 30°\right) = \operatorname{tg}(2x + 60°)$.

127. $\cos 3x = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

128. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$.

129. $\sin 2x = -\sin\frac{x}{2}$.

130. $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg}\frac{x}{3} = 0$.

131. $\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\cos 2x$.

132. $\cos x - \sin x = 1$.

133. $\cos(2x + 15°) + \cos(2x - 15°) = \frac{1}{2}$.

134. $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x\cos x$.

135. $\sin 3x\cos x = \sin 7x\cos 5x$.

136. $2\cos(x + 20°)\cos x = \cos 40°$.

137. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{18}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{9}\right) = -\frac{1}{4}$.

138. $\sin(x + 15°)\sin(x - 30°) = \sin(50° + x)\cos(85° - x)$.

139. $\cos 7x + \cos x = \cos 4x$.

140. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \sin 3x\cos x$.

141. $\cos 8x + \cos 6x = \sqrt{3}\cos x$.

142. $1 - \cos 2x = 4\sin x$.

143. $\sin 2x + 2\sin x = \sin\frac{x}{2}$.

144. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

145. $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$.

146. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

147. $1 + \cos 2x + \sin x = 2\cos^2\frac{x}{2}$.

148. $\sin^2(x + 10°) - \sin^2 x = \frac{1}{2}\sin 20°$.

149. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

150. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

151. $\sin^2 2x + \sin^2 4x = \frac{3}{2}$.

152. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$.

153. $4\sin x + 3\cos x = 2$. Решить двумя способами: введением вспомогательного угла и подстановкой $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

154. $\sin 3x + 2\cos 3x = 1$.

155. $5\cos(2x + 18°) - 12\sin(2x + 18°) = 13$.

156. $(4\sin x - 5\cos x)^2 - 13(4\sin x - 5\cos x) + 42 = 0$.

---

157. Найти углы ромба, если отношение его периметра к сумме диагоналей равно $\frac{3}{2}$.

158. Пусть m — отношение периметра прямоугольного треугольника к радиусу вписанной окружности. Найти углы треугольника при $m = 12$. Исследовать задачу: указать, в каком треугольнике величина m принимает наименьшее значение, и найти это наименьшее значение. Существует ли прямоугольный треугольник, у которого периметр в 10 раз больше радиуса вписанной окружности?

ГЛАВА ПЯТАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТРЕУГОЛЬНИКА И РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 18. Основные зависимости между элементами треугольника

55. Постановка вопроса. *Основными элементами* треугольника называются три его стороны и три его угла. К неосновным причисляются другие его элементы, как то: высоты, биссектрисы, медианы, периметр, площадь и т. п.

Решить треугольник — это значит по известным элементам треугольника при помощи вычислений найти все основные его элементы.

Задачи решения треугольников возникают в связи с различными вопросами при измерениях на местности, в навигации, в строительном деле и т. д. Исторически именно задачи решения треугольников и привели к созданию тригонометрии.

Конечно, решить треугольник можно только тогда, когда известные элементы треугольника вполне его определяют. Например, треугольник можно решить, если известны длины трех его сторон, но треугольник нельзя решить, если даны величины трех его углов, потому что три угла определяют бесконечно много треугольников, подобных между собой.

Из геометрии известно, что три основных элемента (из которых, по крайней мере, один линейный, т. е. сторона) определяют, вообще говоря, единственный треугольник. (Как выполняется при этом решение треугольника, будет показано ниже.) Отсюда следует, что шесть основных элементов треугольника должны быть связаны тремя независимыми соотношениями, позволяющими по трем заданным элементам найти остальные три, т. е. решить треугольник.

Введем прежде всего три наиболее важных и практически употребительных соотношения между основными элементами треугольника.

В дальнейшем везде углы треугольника обозначаются через α, β, γ, противолежащие им стороны соответственно через a, b, c, площадь треугольника через S, полупериметр через $p\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$, радиусы описанной и вписанной окружности соответственно через R и r.

56. Зависимость между углами треугольника. Одной из зависимостей между основными элементами треугольника является зависимость между его углами. Именно: *сумма углов треугольника всегда равна* π (180°):

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \quad (=180^\circ). \tag{1}$$

Благодаря этой зависимости между углами тригонометрические функции углов треугольника также оказываются связанными между собой. Например:

$$\sin\alpha=\sin[\pi-(\beta+\gamma)]=\sin(\beta+\gamma);$$
$$\cos\alpha=\cos[\pi-(\beta+\gamma)]=-\cos(\beta+\gamma)$$

и т. д.

Из того, что

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2} \quad (=90^\circ),$$

следует:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\right]=\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right);$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\right]=\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)$$

и т. д.

57. Теоремы синусов и косинусов. Приведем две важные в теории треугольника теоремы, дающие две употребительные при решении треугольников формулы.

1) Теорема синусов. *Во всяком треугольнике стороны относятся между собой, как синусы противолежащих углов,* т. е.

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}; \quad \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}; \quad \frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

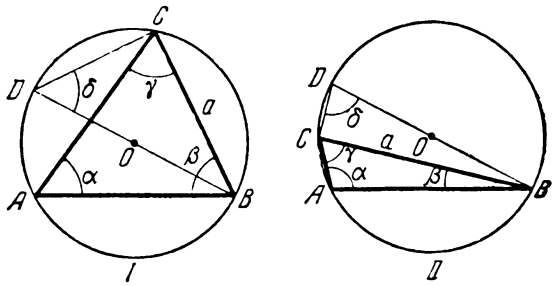
Переставляя члены этих пропорций, получим:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (3)$$

Таким образом, теорему синусов можно высказать и так:

Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство. Рассмотрим угол α треугольника ABC (черт. 43). Опишем около треугольника окружность и из вер-



Черт. 43.

шины B проведем диаметр BD этой окружности. В зависимости от того, будет ли угол α острый или тупой, мы будем иметь либо случай I, либо случай II, изображенные на черт. 43. Точку D соединим с вершиной C. Получим прямоугольный треугольник BCD. Поэтому

$$\frac{a}{\sin\delta}=2R,$$

где δ — угол при вершине D, R — радиус описанной окружности. В первом случае $\delta=\alpha$, так как оба угла α и δ опираются на дугу $\breve{CB}$; следовательно, $\sin\delta=\sin\alpha$. Во втором случае $\delta+\alpha=\pi$, так как δ и α — противоположные углы четырехугольника $ABDC$, вписанного в окружность; значит, опять $\sin\delta=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$. Итак,

$$\frac{a}{\sin\delta}=\frac{a}{\sin\alpha}=2R.$$

Таким же образом докажем, что

$$\frac{b}{\sin\beta}=2R \quad \text{и} \quad \frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R. \qquad (4)$$

Этим теорема синусов доказана, а также выяснено, что *общее значение отношений* (3) *равно диаметру окружности, описанной около треугольника.*

На основании равенств (4) получаем:

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma,$$

т. е. *сторона треугольника равна диаметру описанной окружности, умноженному на синус противолежащего угла.*

2) Теорема косинусов. *Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними* (т. е. на косинус угла, противолежащего вычисляемой стороне):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \qquad (5_1)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \qquad (5_2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \qquad (5_3)$$

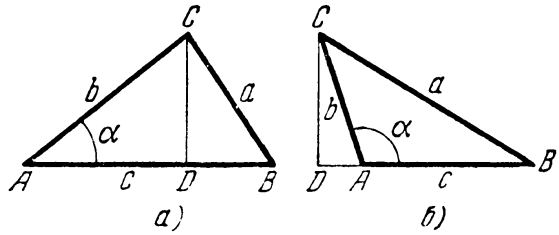
Доказательство. Докажем справедливость формулы (5_1). В случае острого угла α (черт. 44, *а*) имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AD,$$

но

$$AD = b \cos \alpha,$$

и мы получаем формулу (5_1).



Черт. 44.

В случае тупого угла α (черт. 44, *б*) имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot AD,$$

но

$$AD = b \cos (\pi - \alpha) = -b \cos \alpha$$

и снова получаем то же равенство (5_1):

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c(-b \cos \alpha) = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

В случае прямого угла α имеем $\cos\alpha = 0$, и равенство (5_1) при этом выражает теорему Пифагора.

Аналогично доказываются формулы (5_2) и (5_3).

Теорема косинусов объединяет три геометрические теоремы: теорему Пифагора, теорему о квадрате стороны, лежащей против острого угла, и теорему о квадрате стороны, лежащей против тупого угла треугольника.

§ 19. Другие зависимости между элементами треугольника

58. Теорема тангенсов. Преобразование формулы (2), выражающей теорему синусов, дает возможность получить формулу, иногда удобную при вычислениях.

Теорема тангенсов. *Отношение суммы двух сторон треугольника к их разности равно отношению тангенса полусуммы противолежащих углов к тангенсу их полуразности,* т. е.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}, \qquad (6_1)$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}, \qquad (6_2)$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}. \qquad (6_3)$$

Доказательство. Из формулы (2):

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

образуем производные пропорции:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\beta},$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\beta}.$$

Деля по частям первое равенство на второе, получим:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}.$$

Применим формулы для суммы и разности синусов:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

или

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

ч. т. д.

Тем же способом можно получить два других соотношения теоремы тангенсов:

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}},$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}.$$

59. Зависимости между площадью, периметром и другими элементами треугольника.

Теорема 1. *Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, именно:*

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha. \qquad (7)$$

Доказательство. Из вершины C треугольника ABC проведем высоту CD (см. черт. 44). Эта высота равна $b\sin\alpha$. Так как площадь треугольника равна полупроизведению основания c на эту высоту, то мы и приходим к формуле (7).

Теорема 2. *Радиус окружности, описанной около треугольника, равен частному от деления произведения его сторон на учетверенную площадь:*

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

Доказательство. Так как

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}$$

[см. п. 57, формулу (4)], а из формулы (7) следует, что

$$\sin\alpha=\frac{2S}{bc},$$

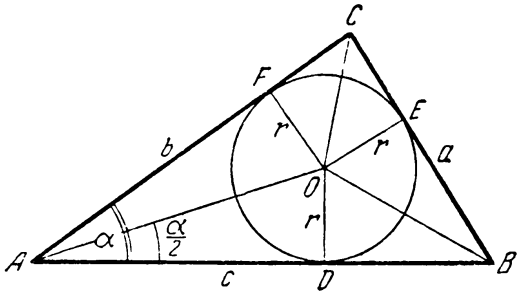
то

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

Теорема 3. *Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен частному от деления его площади на полупериметр*:

$$r=\frac{S}{p}. \qquad (9)$$

Доказательство. Впишем окружность в треугольник ABC (черт. 45) и соединим ее центр O с вершинами



Черт. 45.

треугольника и с точками касания D, E, F. Тогда

$$\text{пл. } ABC=\text{пл. } AOB+\text{пл. } BOC+\text{пл. } COA=$$
$$=\frac{cr}{2}+\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}=r\frac{a+b+c}{2}=rp,$$

т. е. $S=rp$ или

$$r=\frac{S}{p},$$

ч. т. д.

Пользуясь известной из геометрии формулой Герона, получим:

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \qquad (10)$$

Заметим, что величины $p-a$, $p-b$, $p-c$ всегда положительны. В самом деле, например,

$$p-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2},$$

а эта величина всегда положительна, так как сумма любых двух сторон треугольника больше третьей его стороны.

Теорема 4. *Тангенс половины угла треугольника равен частному от деления радиуса вписанной окружности на разность между полупериметром и стороной, противолежащей углу*:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{p-a},\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{p-b};\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{p-c}.$$

Доказательство. Из треугольника AOD (черт. 45) имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{AD} \tag{11}$$

(AO — биссектриса угла A). Найдем AD. Так как

$$AD+DB+BE+EC+CF+FA=2p$$

и

$$AF=AD,\quad DB=BE,\quad CE=CF$$

как отрезки касательных, проведенных из одной точки, то

$$AD+BE+EC=p.$$

Отсюда

$$AD+a=p,$$

т. е.

$$AD=p-a.$$

Таким образом, формула (11) получает вид:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{p-a}, \tag{12_1}$$

и аналогично:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{p-b}, \tag{12_2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{p-c}, \tag{12_3}$$

ч. т. д.

Заменяя в формулах (12) r его выражением из формулы (10), придем к формулам:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \qquad (13_1)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \qquad (13_2)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \qquad (13_3)$$

§ 20. Логарифмы тригонометрических функций

60. Таблица логарифмов тригонометрических функций. Выведенные в пп. 56—59 соотношения применяются для решения треугольников. При этом приходится иметь дело с выражениями, содержащими тригонометрические функции. Находить численные значения этих выражений можно или с помощью таблиц натуральных значений тригонометрических функций (см. стр. 14), или с помощью таблиц логарифмов тригонометрических функций. В последних таблицах по данному значению острого угла α даются значения $\lg\sin\alpha$, $\lg\cos\alpha$, $\lg\operatorname{tg}\alpha$, $\lg\operatorname{ctg}\alpha$.

Пусть, например,

$$A=753\cos 27^\circ.$$

По таблице (см. стр. 14) находим $\cos 27^\circ\approx 0{,}891$ и, значит,

$$A\approx 753\cdot 0{,}891\approx 671.$$

В подобных вычислениях часто бывает удобным пользоваться логарифмами, потому что они позволяют заменять действие умножения действием сложения. В данном случае по таблицам логарифмов чисел находим:

$$\lg A\approx\lg 753+\lg 0{,}891\approx 2{,}8768+\bar{1}{,}9499=2{,}8267;$$

отсюда, с помощью тех же таблиц получаем $A\approx 671$. Здесь мы для отыскания $\lg\cos 27^\circ$ сначала нашли из таблиц натуральных значений $\cos 27^\circ$, а затем из таблицы логарифмов чисел — его логарифм.

Таблицы же логарифмов тригонометрических функций дают возможность избежать двукратного обращения к таблицам и получить сразу нужное нам значение (во взятом примере $\lg\cos 27^\circ$).

Как и в обычных таблицах логарифмов, мантиссы (т. е. дробные части) логарифмов тригонометрических функций

всегда даются положительными, а характеристики (т. е. целые части) логарифмов могут быть и отрицательными (в последнем случае знак «минус» обычно пишут над характеристикой).

Например: $\lg\cos 27° = \bar{1},9499 = -1 + 0,9499 = -0,0501$.

Напомним, что логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны, а больших единицы — положительны. Поэтому $\lg\sin\alpha$ и $\lg\cos\alpha$ для $0 < \alpha < 90°$ отрицательны; $\lg\operatorname{tg}\alpha$ для $0 < \alpha < 45°$, а $\lg\operatorname{ctg}\alpha$ для $45° < \alpha < 90°$ отрицательны; $\lg\operatorname{tg}\alpha$ для $45° < \alpha < 90°$, а $\lg\operatorname{ctg}\alpha$ для $0 < \alpha < 45°$ положительны.

Наибольшее распространение имеют четырехзначные и пятизначные таблицы логарифмов тригонометрических функций. Для особо точных вычислений, например в астрономии, пользуются семизначными и десятизначными таблицами.

Мы здесь ориентируемся на четырехзначные таблицы Брадиса.

Углы α, для которых приведены в таблице значения $\lg\sin\alpha$, $\lg\cos\alpha$, $\lg\operatorname{tg}\alpha$ и $\lg\operatorname{ctg}\alpha$, даются через определенный промежуток, который называется *шагом таблицы*. В таблицах Брадиса этот шаг равен 6 минутам. (Значения $\lg\sin\alpha$ и $\lg\operatorname{tg}\alpha$ для углов α, меньших 14°, и $\lg\operatorname{tg}\alpha$ для углов, больших 65°, даны через минуту, ввиду того что для этих углов указанные функции очень быстро меняются.)

В силу зависимости $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ и $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ таблицы логарифмов синусов и тангенсов служат и для нахождения логарифмов соответственно косинусов и котангенсов.

Для отыскания логарифма какой-нибудь функции угла α, отсутствующего в таблицах Брадиса (например, $\lg\sin 20°20'$), ищем в таблице значение логарифма той же функции от угла α_0, ближайшего к α (в нашем примере таким углом будет угол в 20°18'). Угол α получается путем прибавления к α_0 или вычитания из α_0 некоторого h; поскольку шаг таблицы равен 6 минутам, h не превосходит 3 минут. В той же строке, где находится значение логарифма функции для угла α_0, указана поправка d для $h = 1'$, $h = 2'$, $h = 3'$. Прибавление или вычитание этой поправки из значения логарифма функции угла α_0 и дает значение логарифма функции угла α.

Важно заметить, что при возрастании острого угла α функции $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ возрастают, а $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ убывают. Значит, при возрастании острого угла α функции $\lg\sin\alpha$ и $\lg\operatorname{tg}\alpha$ возрастают, а $\lg\cos\alpha$ и $\lg\operatorname{ctg}\alpha$ убывают. В силу этого для отыскания $\lg\sin\alpha$ и $\lg\operatorname{tg}\alpha$ нужно к $\lg\sin\alpha_0$ и $\lg\operatorname{tg}\alpha_0$ прибавить d, если h прибавляется к α_0, и вычесть из них d, если h вычитается из α_0; наоборот, для отыскания $\lg\cos\alpha$ и $\lg\operatorname{ctg}\alpha$ нужно из $\lg\cos\alpha_0$ и $\lg\operatorname{ctg}\alpha_0$

вычесть d, если h прибавляется к α_0, и прибавить к ним d, если h вычитается из α_0.

Точно так же можно пользоваться и четырехзначными «натуральными» таблицами.

Пример 1. Найти $\lg \sin 20°20'$.

Имеем:

$$\alpha = 20°20', \quad \alpha_0 = 20°18'; \quad h = 2', \quad d = 0{,}0007.$$

По таблицам находим:

$$\begin{array}{rr} \lg \sin 20°18' = & \bar{1},5402 \\ {}^{+}2' & +7 \\ \hline \lg \sin 20°20' = & \bar{1},5409 \end{array}$$

Пример 2. Найти $\lg \cos 30°32'$.

Имеем:

$$\alpha = 30°32', \quad \alpha_0 = 30°30'; \quad h = 2', \quad d = 0{,}0001.$$

По таблицам находим:

$$\begin{array}{rr} \lg \cos 30°30' = & \bar{1},9353 \\ {}^{+}2' & -1 \\ \hline \lg \cos 30°32' = & \bar{1},9352 \end{array}$$

Таблицы логарифмов тригонометрических функций могут быть также использованы для отыскания острого угла α по заданному значению одной из функций $\lg \sin \alpha$, $\lg \cos \alpha$, $\lg \operatorname{tg} \alpha$ и $\lg \operatorname{ctg} \alpha$. Ход выкладок обратен тому, который был указан для отыскания значений этих функций по заданному углу. Поясним его на числовых примерах.

Пример 3. Найти α, если $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}2221$.

В таблице значений функции $\lg \operatorname{tg} \alpha$ нет числа 0,2221. Ищем ближайшее к нему значение этой функции, помещенное в таблице; это есть число $0{,}2229 = \lg \operatorname{tg} 59°6'$; значит, $\alpha_0 = 59°6'$.

Заданное число 0,2221 получается из 0,2229 вычитанием 0,0008. В таблице поправок (в той же строке) мы видим, что поправка $d = 0{,}0009$, ближайшая к 0,0008, соответствует $h = 3'$. Так как поправка d вычитается, то $h = 3'$ должна тоже вычитаться.

Имеем:

$$\begin{array}{rr} \lg \operatorname{tg} \alpha = & 0{,}2221 \\ \lg \operatorname{tg} 59°6' = & 0{,}2229 \\ {}^{-}3' & -8 \\ \hline \alpha = & 59°3' \end{array}$$

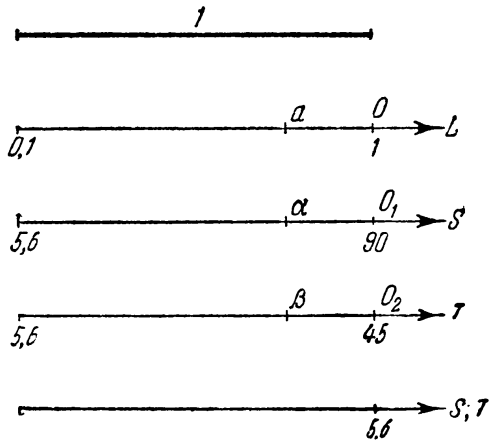
Пример 4. Найти α, если $\lg \cos \alpha = \bar{1},9377$.

Имеем:

$$\begin{array}{r} \lg\cos\alpha = \bar{1},9377 \\ \lg\cos 30^\circ = \bar{1},9375 \\ -3' \qquad +2 \\ \hline \alpha = 29^\circ 57' \end{array}$$

Совершенно аналогично находятся значения тригонометрических функций по значению острого угла и, наоборот, значение острого угла по значению тригонометрических функций, если пользоваться таблицами натуральных значений тригонометрических функций.

61. Применения логарифмической линейки в тригонометрических вычислениях. В практических расчетах часто вместо логарифмических таблиц употребляют *логарифмическую* («*счетную*») *линейку*. Она используется также и в тригонометрических вычислениях. Прежде чем разъяснить принципы этого применения логарифмической линейки, коснемся важного понятия функциональной шкалы.



Черт. 46.

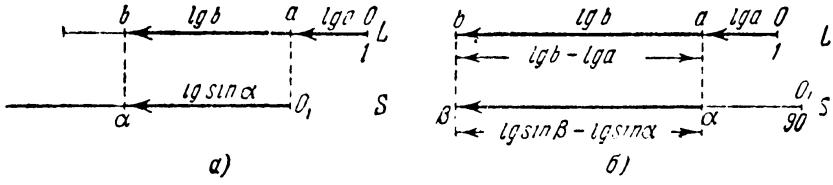
Функциональной шкалой для заданной функции называется ось, точки которой отмечены числами так: числом x отмечена такая точка оси, что отрезок Ox (*O* — начало) *в избранном масштабе равен значению функции для значения аргумента, равного x.*

Логарифмическая линейка наряду со шкалой для функции $\lg x$ (*логарифмическая шкала* — сокращенно *L*-шкала) содержит шкалы для функций $\lg\sin\alpha$ (*S*-шкала) и $\lg\operatorname{tg}\alpha$ (*T*-шкала), причем α выражен в градусах. Начало *O* *L*-шкалы отмечено числом 1 ($\lg 1 = 0$); начало O_1 *S*-шкалы — числом 90 ($\lg\sin 90^\circ = 0$); начало O_2 *T*-шкалы — числом 45 ($\lg\operatorname{tg} 45^\circ = 0$). На черт. 46 приведены *L*-, *S*- и *T*-шкалы с общей масштабной единицей и общим положительным направлением (слева направо). На обычной логарифмической линейке в качестве масштабной единицы служит отрезок длиной 25 *см*; *L*-шкалы

расположены на корпусе и на движке линейки, S- и T-шкалы — на оборотной стороне движка.

На черт. 46 L-, S- и T-шкалы изображены в своем исходном положении: их начала O, O_1 и O_2 лежат друг против друга (т. е. на общем перпендикуляре к этим шкалам). Если против отметки a L-шкалы лежат отметки α S-шкалы и β T-шкалы, то $\lg a = \lg \sin \alpha = \lg \operatorname{tg} \beta$, т. е. $a = \sin \alpha = \operatorname{tg} \beta$.

Для того чтобы найти с помощью логарифмической линейки произведение $b = a \sin \alpha$, нужно (черт. 47, *а*) передвинуть S-шкалу так, чтобы ее начало легло против отметки a L-шкалы. Тогда против отметки α S-шкалы находится отметка b



Черт. 47.

L-шкалы. В самом деле, в таком положении $\lg b = \lg a + \lg \sin \alpha$, т. е. $\lg b = \lg (a \sin \alpha)$ и, значит, $b = a \sin \alpha$.

Для того чтобы найти частное $a = \frac{b}{\sin \alpha}$, надо (черт. 47, *а*) передвинуть S-шкалу так, чтобы ее отметка α легла против отметки b L-шкалы. Тогда против O_1 — начала S-шкалы (отметки 90°) найдем на L-шкале отметку a.

Аналогично, пользуясь T-шкалой, находят выражения $b = a \operatorname{tg} \beta$, $a = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta}$. Заметим, что логарифмическая линейка имеет лишь часть T-шкалы, расположенную левее начала O_2 (отметки 45°) и соответствующую острым углам β, меньшим 45°. Если же $45° < \beta < 90°$, то $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg}(90° - \beta)}$, где $0 < 90° - \beta < 45°$, и умножение и деление на $\operatorname{tg} \beta$ заменяются соответственно делением и умножением на $\operatorname{tg}(90° - \beta)$.

На расстоянии 1 влево от начала O L-шкалы находится на ней точка с отметкой 0,1 ($\lg 0{,}1 = -1$); на S- и T-шкалах ей соответствуют точки с отметками 5,6 ($\sin 5°{,}6 \approx 0{,}1$; $\operatorname{tg} 5°{,}6 \approx 0{,}1$). Для всех углов α, меньших 5°,6, можно считать с точностью, которая допустима при расчетах с помощью логарифмической линейки, что $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$. В самом деле, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, а $\cos \alpha$ для указанных углов достаточно близок

к единице: $0{,}995 < \cos\alpha < 1$. Части S- и T-шкал, лежащие левее их отметок 5°,6, практически совпадают. Эта общая часть обеих шкал называется ST-шкалой; ее исходное положение на логарифмической линейке (также на оборотной стороне движка) приведено на черт. 46. Она сдвинута относительно S- и T-шкал на 1 вправо).

Заметим, что если отметки α и β S- (или T-) шкалы находятся против отметок a и b L-шкалы (черт. 47, *б*), то имеем:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \left(\text{или } \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right).$$

В самом деле, так как отрезки наших шкал между соответствующими отметками равны между собой, а отрезок на L-шкале равен $\lg b - \lg a = \lg\frac{b}{a}$ и на S-шкале (или T-шкале) равен $\lg\sin\beta - \lg\sin\alpha = \lg\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ $\left(\text{или } \lg\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$, то

$$\lg\frac{b}{a} = \lg\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \left(\text{или } \lg\frac{b}{a} = \lg\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right).$$

§ 21. Решение треугольников

62. Решение прямоугольных треугольников. Задача решения треугольника значительно упрощается в случае прямоугольного треугольника. В этом случае один из углов — прямой, $\gamma = 90°$ и, значит, $\alpha + \beta = 90°$, а соотношения между элементами треугольника имеют особенно простой вид [см. формулы (1) — (4) главы I]. Поскольку один элемент — угол γ — заранее известен, для решения прямоугольного треугольника необходимо задание двух элементов, из которых по меньшей мере один — линейный. При вычислениях можно пользоваться как таблицами натуральных значений, так и «логарифмическими» таблицами или логарифмической линейкой. Числовые примеры будем здесь решать с помощью «логарифмических» таблиц.

Рассмотрим четыре основных случая решения прямоугольных треугольников, указав в каждом из них одно из возможных решений.

Случай I. *Дана гипотенуза c и угол α.*

Имеем:

$$\beta = 90° - \alpha, \quad a = c\sin\alpha, \quad b = c\cos\alpha.$$

Для проверки результатов можно прибегнуть или к любому из соотношений (1) — (4) главы I, не использованному в данном подсчете, или, например, к теореме Пифагора. Подставляя в контрольное соотношение заданные и вычисленные элементы треугольника, проверяют, получается или не получается численное тождество.

Пример 1. $c = 12{,}783$; $\alpha = 23°17'7''$.

Поскольку таблицы Брадиса четырехзначные, округлим значения c до четырех значащих цифр, положив $c = 12{,}78$; точно так же при пользовании этими таблицами угол α округлим до целого числа минут: $\alpha = 23°17'$. Находим:

$$\beta = 90° - 23°17' = 66°43'.$$

Имеем:

$$\lg a = \lg c + \lg \sin \alpha, \quad \lg b = \lg c + \lg \cos \alpha.$$

Находим:

$$\begin{array}{r} \lg c = 1{,}1065 \\ + \lg \sin \alpha = \bar{1}{,}5969 \\ \hline \lg a = 0{,}7034 \end{array}$$

Отсюда

$$a = 5{,}047.$$

Далее находим:

$$\begin{array}{r} \lg c = 1{,}1065 \\ + \lg \cos \alpha = \bar{1}{,}9632 \\ \hline \lg b = 1{,}0697 \end{array}$$

откуда

$$b = 11{,}74.$$

Для контроля здесь можно воспользоваться формулой

$$b = a \operatorname{tg} \beta \quad \text{или} \quad \lg b = \lg a + \lg \operatorname{tg} \beta.$$

Имеем:

$$\begin{array}{r} \lg a = 0{,}7034 \\ + \lg \operatorname{tg} \beta = 0{,}3662 \\ \hline \lg b = 1{,}0696 \end{array}$$

Раньше было найдено: $\lg b = 1{,}0697$. Мы имеем хорошее совпадение.

Случай II. *Дан катет a и угол α или β.*

Имеем:

$$\beta = 90° - \alpha \quad \text{или} \quad \alpha = 90° - \beta, \quad b = a \operatorname{tg} \beta, \quad c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Случай III. *Даны катет a и гипотенуза c.*

Имеем:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad b = c\cos\alpha, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Пример 2. $a = 23{,}15$; $c = 31{,}81$.

Вычисления будем вести снова с помощью «логарифмических» таблиц. Имеем:

$$\lg\sin\alpha = \lg a - \lg c, \quad \lg b = \lg c + \lg\cos\alpha.$$

Находим:

$$\begin{array}{r} -\lg c = 2{,}4975 \\ +\lg a = 1{,}3645 \\ \hline \lg\sin\alpha = \bar{1}{,}8620 \end{array}$$

Отсюда

$$\alpha = 46^\circ 42';$$
$$\beta = 90^\circ - 46^\circ 42' = 43^\circ 18'.$$

Далее,

$$\begin{array}{r} \lg c = 1{,}5025 \\ +\lg\cos\alpha = \bar{1}{,}8362 \\ \hline \lg b = 1{,}3387 \end{array}$$

откуда

$$b = 21{,}81.$$

В качестве контрольной используем формулу

$$a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad \text{или} \quad \lg a = \lg b + \lg\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Имеем:

$$\begin{array}{r} \lg b = 1{,}3387 \\ \lg\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}0258 \\ \hline \lg a = 1{,}3645 \end{array}$$

что совпадает с табличным значением $\lg a$.

Случай IV. *Даны катеты a и b.*

Имеем:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}; \quad c = \frac{a}{\sin\alpha}; \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

63. Решение косоугольных треугольников. *Основными случаями* в решении треугольников называют случаи, когда по заданным трем основным элементам (из которых по меньшей мере один линейный) находят остальные три основных элемента.

Таких основных случаев может быть четыре, именно случаи, когда заданы: 1) сторона и два угла; 2) две стороны и

угол, лежащий между ними; 3) две стороны и угол, лежащий против одной из них; 4) три стороны.

Решение косоугольного треугольника упрощается, если известно, что он равнобедренный; при этом высота, опущенная на основание, разбивает треугольник на два равных прямоугольных треугольника, и задача сводится к решению прямоугольного треугольника.

Неосновные случаи в решении треугольников мы специально рассматривать не будем.

Для отыскания трех неизвестных основных элементов составляют три уравнения. В качестве одного из них берут соотношение (1):

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ,$$

в качестве двух других — два из соотношений между основными элементами треугольника, выведенных в пп. 57—59 (теоремы синусов, косинусов, тангенсов и др.). Для контроля прибегают к соотношению, не использованному при решении.

Решение треугольника иногда оказывается невозможным. Например, нельзя решить треугольник, если заданы стороны 20, 10, 5 (так как каждая сторона треугольника должна быть меньше суммы двух других сторон) или если заданы стороны $a=20$, $b=10$ и угол $\beta=100^\circ$, лежащий против стороны b (так как против меньшей стороны b не может лежать тупой угол).

Случай I. *Дана сторона и два угла, например, a, α и β.* Имеем:

$$\gamma=180^\circ-\alpha-\beta.$$

По теореме синусов:

$$b=\frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta,$$

$$c=\frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma.$$

Задача всегда имеет решение и всегда только одно.

Пример. $a=20$, $\alpha=69^\circ$, $\beta=82^\circ$.

Получаем:

$$\gamma=180^\circ-69^\circ-82^\circ=29^\circ.$$

По таблицам натуральных значений тригонометрических функций находим:

$$\sin\alpha=0{,}934;\quad \sin\beta=0{,}990;\quad \sin\gamma=0{,}485.$$

Следовательно,

$$b = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta = \frac{20}{0{,}934}\cdot 0{,}990 = 21{,}4\cdot 0{,}990 = 21{,}2;$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma = 21{,}4\cdot 0{,}485 = 10{,}4.$$

Для контроля возьмем, например, теорему косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Имеем:

$$108{,}2 \approx 400 + 449{,}4 - 2\cdot 20\cdot 21{,}2\cdot 0{,}875 \approx 107{,}4.$$

Этот же пример решаем с помощью таблиц логарифмов тригонометрических функций. Имеем:

$$\lg b = (\lg a - \lg\sin\alpha) + \lg\sin\beta,$$
$$\lg c = (\lg a - \lg\sin\alpha) + \lg\sin\gamma.$$

Находим:

$$\begin{array}{r} \lg a = 1{,}3010 \\ -\lg\sin\alpha = 0{,}0299 \\ \hline +\begin{array}{r} \lg a - \lg\sin\alpha = 1{,}3309 \\ \lg\sin\beta = \bar{1}{,}9958 \end{array} \\ \hline \lg b = 1{,}3267 \end{array}$$

откуда

$$b = 21{,}21.$$

Далее,

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} \lg a - \lg\sin\alpha = 1{,}3309 \\ \lg\sin\gamma = \bar{1}{,}6855 \end{array} \\ \hline \lg c = 1{,}0164 \end{array}$$

откуда

$$c = 10{,}39.$$

В качестве контрольной здесь удобней использовать формулу тангенсов:

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}},$$

т. е.

$$(a+c)\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2} = (a-c)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

откуда

$$\lg(a+c) + \lg\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2} = \lg(a-c) + \lg\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Находим:

$$a+c=30{,}39; \quad a-c=9{,}61;$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{2}=20^\circ; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{ctg}41^\circ.$$

Получаем:

$$\begin{array}{rl} + & \lg(a+c)=1{,}4827 \\ & \lg\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}=\bar{1}{,}5611 \\ \hline & =1{,}0438 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} + & \lg(a-c)=0{,}9828 \\ & \lg\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=0{,}0607 \\ \hline & =1{,}0435 \end{array}$$

$$1{,}0438 \approx 1{,}0435.$$

Случай II. *Даны две стороны и угол между ними, например, a, b и γ.*

Сторону c можно найти по теореме косинусов:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Угол α также найдем на основании теоремы косинусов из формулы

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Наконец,

$$\beta=180^\circ-\alpha-\gamma.$$

Если для решения треугольника пользоваться «логарифмическими» таблицами или логарифмической линейкой, то углы α и β удобнее находить, применяя формулу тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Отсюда находим $\frac{\alpha-\beta}{2}$; по $\frac{\alpha-\beta}{2}$ и $\frac{\alpha+\beta}{2}\left(=90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)$ находим α и β. Сторону c вычисляем по теореме синусов:

$$c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Задача всегда имеет решение и притом только одно.

Для контроля здесь удобно воспользоваться также теоремой синусов:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Случай III. *Даны две стороны и угол против одной из них, например, a, b и α.*

Из теоремы синусов следует:

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha. \qquad (14)$$

Определив β, найдем:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Тогда c можно вычислить также по теореме синусов:

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

В отличие от предыдущих случаев задача не всегда имеет решение, а если и имеет, то не всегда единственное.

Произведем исследование задачи, оставив без рассмотрения случай равнобедренного треугольника $a = b$, о котором уже говорилось выше. Рассмотрим отдельно случаи $a > b$ и $a < b$.

1) $a > b$ (данный угол α лежит против большей из данных сторон).

При этом $\frac{b}{a} < 1$ и в силу формулы (14) $\sin\beta < \sin\alpha \leqslant 1$, т. е. $\sin\beta < 1$, и задача нахождения β разрешима. Так как β — угол треугольника, то найденному значению $\sin\beta$ могут соответствовать два значения угла β: один острый, другой тупой. Но поскольку β лежит против меньшей стороны b, то угол β должен быть острым.

Итак, *в случае $a > b$ задача имеет решение и притом только одно.*

2) $a < b$ (данный угол α лежит против меньшей из данных сторон).

При этом, если угол α тупой или прямой, то задача не имеет решения, так как ни тупой, ни прямой угол не может лежать против меньшей стороны. Если α — острый угол, то имеются три возможности:

а) $\frac{b}{a}\sin\alpha > 1$ (т. е. $a < b\sin\alpha$); тогда $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha > 1$ и, как видно, задача не имеет решения.

б) $\frac{b}{a}\sin\alpha = 1$ (т. е. $a = b\sin\alpha$); тогда $\sin\beta = 1$, и решение единственное — прямоугольный треугольник.

в) $\frac{b}{a}\sin\alpha < 1$ (т. е. $a > b\sin\alpha$); тогда $\sin\beta < 1$; данному значению $\sin\beta$ соответствуют два угла β: один острый, другой тупой, и задача имеет два решения.

Результаты исследования могут быть записаны в виде схемы:

$a > b$	$a < b$			
	$\alpha > 90°$	$\alpha < 90°$		
		$a < b\sin\alpha$	$a = b\sin\alpha$	$a > b\sin\alpha$
Одно решение	Нет решения	Нет решения	Одно решение	Два решения

Когда задача имеет решение, в качестве контрольной можно использовать формулу тангенсов.

Пример. $a = 20{,}21$; $b = 15{,}76$; $\alpha = 100°3'$ $(a > b)$.

Имеем:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a},$$

$$\lg\sin\beta = \lg b + \lg\sin\alpha - \lg a.$$

Находим:

$$\begin{array}{r} -\lg a = \bar{2},6944 \\ \lg b = 1,1976 \\ \lg\sin\alpha = \bar{1},9933 \\ \hline \lg\sin\beta = \bar{1},8853 \end{array}$$

откуда

$$\beta = 50°9' \quad \text{или} \quad \beta = 180° - 50°9' = 129°51'.$$

Второе из этих значений должно быть отброшено, так как угол, лежащий против меньшей стороны b, не может быть тупым.

Далее,

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 100°3' - 50°9' = 29°48'.$$

Теперь имеем:

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

$$\lg c = \lg a + \lg\sin\gamma - \lg\sin\alpha.$$

Находим:

$$\begin{array}{r} -\lg\sin\alpha = 0,0067 \\ +\quad \lg a = 1,3056 \\ \lg\sin\gamma = \bar{1},6963 \\ \hline \lg c = 1,0086 \end{array}$$

откуда

$$c = 10{,}20.$$

Контроль:

$$\lg(a-b) + \lg \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \lg(a+b) + \lg \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

и так как

$$a+b = 35{,}97; \quad a-b = 4{,}45;$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 75°6', \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = 24°57',$$

то имеем:

$$\begin{array}{ll} \lg(a-b) = 0{,}6484 & \lg(a+b) = 1{,}5560 \\ \lg \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = 0{,}5750 & \lg \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \bar{1}{,}6667 \\ \hline = 1{,}2234 & = 1{,}2237 \end{array}$$

$$1{,}2234 \approx 1{,}2237.$$

Случай IV. *Даны стороны* a, b, c. Угол α можно вычислить или согласно теореме косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \tag{15}$$

или по формуле (13_1):

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \tag{16}$$

Точно так же можно вычислить, например, угол β, а затем и угол γ по формуле

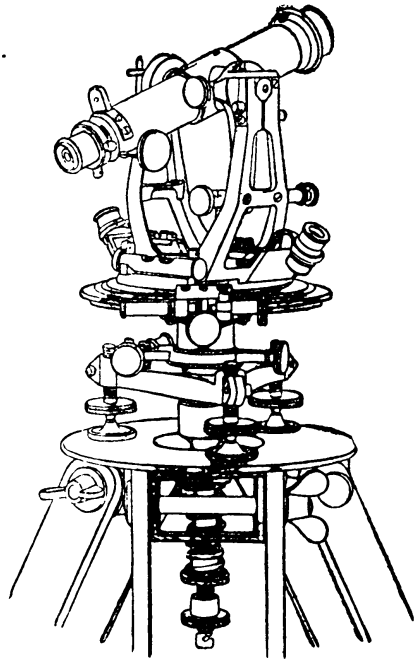
$$\gamma = 180° - \alpha - \beta.$$

Первый метод [по формуле (15)] удобнее при пользовании таблицами натуральных значений тригонометрических функций, второй [по формуле (16)] — при пользовании таблицами логарифмов тригонометрических функций или логарифмической линейкой.

Из геометрических соображений очевидно, что задача имеет решение и притом только одно, если каждая сторона меньше суммы двух других сторон. Это же заключение можно вывести и из формул (15) и (16).

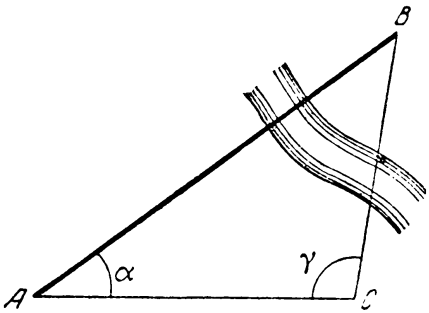
В качестве контрольной можно прибегнуть, например, к любой из формул (15) и (16), не использованной при решении задачи.

64. Измерения линий и углов на местности. Во многих задачах практического характера оказывается необходимым знать расстояния между точками земной поверхности и углы между линиями на ней. Непосредственное измерение этих расстояний и углов часто бывает затруднительным, а иногда и невозможным. Решение треугольников позволяет найти расстояние между двумя точками, не производя непосредственного измерения, а измеряя лишь углы и расстояния между доступными точками, не слишком отдаленными друг от друга. Измерение углов на местности выполняется проще, чем измерение расстояний. Оно производится с помощью так называемых угломерных приборов (например, теодолитов; черт. 48).



Черт. 48.

Зрительная труба теодолита способна вращаться как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости. Благодаря этому теодолит позволяет находить угол между горизонтальными проекциями направлений на две точки, а также «угловое возвышение» точки, т. е. угол между направлением на точку и его горизонтальной проекцией.



Черт. 49.

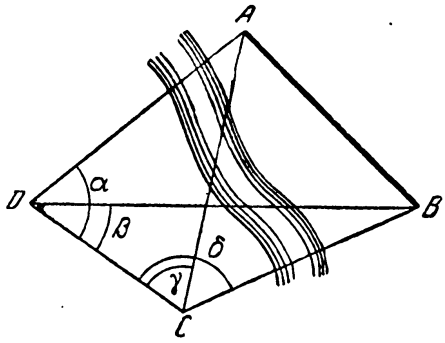
Приведем несколько примеров вычисления расстояний с помощью решения треугольников.

Задача 1. *Вычисление расстояния от доступной точки до недоступной.*

Пусть точка A доступна, а точка B недоступна (черт. 49). Для отыскания расстояния AB выбирают доступную точку C, из которой видны A и B. Измеряют расстояние CA и углы $CAB = \alpha$ и $ACB = \gamma$. Решая треугольник ABC по стороне AC и двум углам α и γ, находят сторону AB.

Задача 2. *Вычисление расстояния между недоступными точками.*

Пусть A и B — две недоступные точки (черт. 50). Выбирают две доступные точки C и D, из которых видны A и B. Измеряют расстояние CD и углы $ADC = \alpha$, $BDC = \beta$, $ACD = \gamma$, $BCD = \delta$.

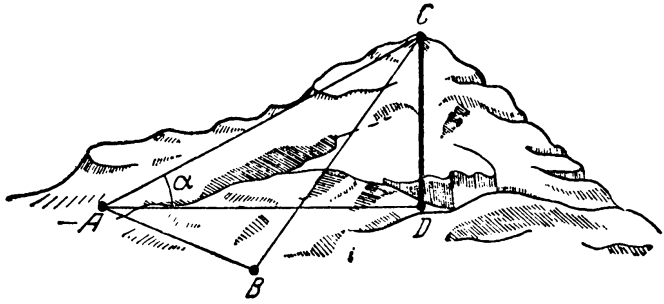


Черт. 50.

Решая треугольник ACD по стороне CD и углам $ADC = \alpha$ и $ACD = \gamma$ и треугольник BCD по стороне CD и углам $BDC = \beta$ и $BCD = \delta$, находят стороны AC и BC. Решая треугольник ABC по двум сторонам AC и BC и углу между ними ($\angle ACB = \angle BCD - \angle ACD = \delta - \gamma$), находят искомое расстояние.

Задача 3. *Вычисление высоты предмета.*

Пусть C — недоступная точка, D — ее горизонтальная проекция, A и B — две доступные точки в горизонтальной плоскости, из которых видна точка C (черт. 51).



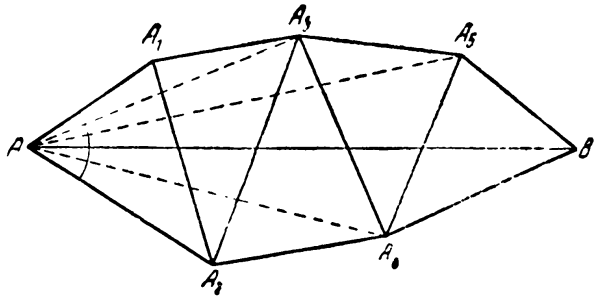
Черт. 51.

Находят (как в предыдущей задаче) расстояние AC из треугольника ABC. Далее измеряют угол $\alpha = \angle CAD$ между AC и AD (AD — проекция AC). Отрезок DC находят из прямоугольного треугольника ADC по гипотенузе AC и углу α.

Задача 4. *Вычисление расстояния между двумя далекими точками A и B* (способ триангуляции).

Соединяют точки A и B сетью треугольников AA_1A_2, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, ..., $A_{n-1}A_nB$ (черт. 52). Вершины треугольников выбирают так, чтобы из каждой вершины треугольника были видны две другие, а первый треугольник AA_1A_2 выбирают так, чтобы сторона AA_1 (или AA_2) была

доступна непосредственному измерению. Измерив эту сторону и углы $\angle AA_1A_2$ и $\angle A_1AA_2$, находят, как в задаче 2, из треугольника AA_1A_2 стороны AA_2 и A_1A_2. Далее, точно таким



Черт. 52.

же образом, зная сторону A_1A_2 треугольника $A_1A_2A_3$ и измерив его углы, вычисляют другие его стороны. Так последовательно находят, измеряя в дальнейшем лишь углы, стороны всех наших треугольников. Далее рассматривают вспомогательные треугольники AA_2A_3, AA_3A_4, AA_4A_5, ..., AA_nB.

В треугольнике AA_2A_3 по найденным сторонам AA_2, A_2A_3 и $\angle AA_2A_3 = \angle AA_2A_1 + \angle A_1A_2A_3$ находят сторону AA_3 и $\angle AA_3A_2$; аналогично, в треугольнике AA_3A_4 по сторонам AA_3, A_3A_4 и $\angle AA_3A_4 = \angle AA_3A_2 + \angle A_2A_3A_4$ находят сторону AA_4 и $\angle AA_4A_3$ и т. д. Последовательно решая так один за другим все вспомогательные треугольники, находят в конце концов сторону AB последнего из этих треугольников (на черт. 52 — треугольника AA_5B).

Задачи к главе V

1. Упростить выражения:

(a) $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$; (b) $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$.

2. Найти $\cos\alpha$, если $\cos\beta = \frac{1}{3}$ и $\sin\gamma = \frac{4}{5}$, причем $\gamma > \frac{\pi}{2}$.

3. Найти $\operatorname{tg}\gamma$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $\operatorname{tg}\beta = 3$.

Доказать тождества (задачи 4—7):

4. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

5. $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 1$.

6. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

7. $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma = 1$.

8. Углы остроугольного треугольника связаны соотношением

$$\sin\alpha = 4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Доказать, что треугольник равнобедренный.

9. Углы треугольника связаны соотношением

$$\cos\alpha + \cos\beta = \sin\gamma.$$

Доказать, что треугольник прямоугольный.

10. Углы треугольника связаны соотношением

$$\sin\alpha = 2 \sin\beta \cos\gamma.$$

Доказать, что треугольник равнобедренный.

11. Два угла треугольника относятся, как $1:2$, а противолежащие им стороны, как $1:\sqrt{3}$. Найти углы треугольника.

12. Пользуясь теоремой синусов, доказать теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника.

13. Найти сумму косинусов углов треугольника, стороны которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным $\frac{3}{4}$.

14. Стороны треугольника связаны соотношением

$$\frac{a^2 - (b-c)^2}{bc} = 1.$$

Найти α.

15. Пользуясь теоремами косинусов и синусов, доказать тождество

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma.$$

Указание. Выразить $\cos\gamma$ через стороны треугольника и в полученной дроби стороны заменить синусами противолежащих им углов.

16. Из системы соотношений

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \text{и} \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

вывести алгебраически теорему косинусов.

17. Доказать, что в прямоугольном треугольнике отношение суммы катетов к их разности равно котангенсу полуразности острых углов.

18. Геометрическими построениями доказать теорему тангенсов.

Указание. В треугольнике ABC отложить на стороне BC (допуская, что $a > c$) и на ее продолжении отрезки $DB = BE = c$, соединить точки D и E с вершиной A, провести $DF \parallel AE$ и рассмотреть подобные треугольники AEC и DFC.

19. Дано: $b = 40$, $c = 15$, $\alpha = 60^\circ$. Найти S.

20. Треугольный участок земли ABC был обмерен так называемым полярным способом. Из точки O, выбранной внутри участка, были измерены расстояния $OA = 28$ *м*, $OB = 43$ *м* и $OC = 50$ *м* и углы $AOB = 152^\circ$ и $BOC = 94^\circ$. Найти площадь участка.

21. В круг радиуса R вписана трапеция. Одно основание совпадает с диаметром круга, а другое — стягивает дугу α. Найти площадь трапеции.

22. Выразить площадь параллелограмма через его стороны m и n и острый угол φ между его диагоналями.

Указание Выразить стороны параллелограмма через его диагонали и угол φ.

---

23. Указать знак числа:

(a) $\lg \sin 72°$; (b) $\lg \operatorname{tg} 38°$; (c) $\lg \cos 15°$;
(d) $\lg \operatorname{ctg} 10°$; (e) $\lg \operatorname{tg} 78°$; (f) $\lg \sin 8°$; (g) $\lg \operatorname{tg} 65°$.

24. Указать знак числа:

(a) $\lg \sin \frac{3\pi}{8}$; (b) $\lg \cos 1$; (c) $\lg \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$; (d) $\lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2}$; (e) $\lg \operatorname{tg} 1{,}4$.

25. Указать знак разности:

(a) $\lg \sin 41° - \lg \sin 40°$; (b) $\lg \operatorname{tg} 1 - \lg \operatorname{tg} 0{,}9$;
(c) $\lg \cos 10° - \lg \cos 9°$; (d) $\lg \sin \frac{5\pi}{17} - \lg \sin \frac{4\pi}{17}$;
(e) $\lg \operatorname{ctg} \frac{\pi}{9} - \lg \operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}$; (f) $\lg \cos 0{,}5 - \lg \cos 0{,}4$.

Упростить выражения (задачи 26—28).

26. (a) $\lg \sin \alpha - \lg \cos \alpha$; (b) $\lg \operatorname{tg} \alpha + \lg \operatorname{ctg} \alpha$.

27. $\lg (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2 \lg \cos \alpha$. **28.** $\lg \sin \alpha + \lg \cos \alpha + \lg 2$.

Пользуясь таблицей логарифмов тригонометрических функций, найти (задачи 29—30):

29. (a) $\lg \sin 22°30'$; (b) $\lg \cos 18°12'$; (c) $\lg \operatorname{tg} 38°18'$; (d) $\lg \operatorname{ctg} 10°36'$.

30. (a) $\lg \cos 52°24'$; (b) $\lg \sin 63°$; (c) $\lg \operatorname{tg} 51°48'$; (d) $\lg \operatorname{ctg} 81°42'$.

Пользуясь таблицей логарифмов тригонометрических функций, найти острый угол α, если (задачи 31—32):

31. (a) $\lg \operatorname{tg} \alpha = \bar{1}{,}6300$; (b) $\lg \cos \alpha = \bar{1}{,}9487$;
(c) $\lg \cos \alpha = \bar{1}{,}9808$; (d) $\lg \sin \alpha = \bar{2}{,}9614$;
(e) $\lg \operatorname{tg} \alpha = \bar{3}{,}9952$; (f) $\lg \operatorname{ctg} \alpha = 0{,}7741$.

32. (a) $\lg \operatorname{ctg} \alpha = \bar{1}{,}3200$; (b) $\lg \cos \alpha = \bar{1}{,}6510$;
(c) $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}0106$; (d) $\lg \operatorname{tg} \alpha = 1{,}0008$;
(e) $\lg \sin \alpha = \bar{1}{,}9974$; (f) $\lg \operatorname{ctg} \alpha = \bar{1}{,}5727$.

Найти по таблице (задачи 33—34):

33. (a) $\lg \operatorname{tg} 32°25'$; (b) $\lg \sin 57°10'$; (c) $\lg \operatorname{tg} 12°14'$;
(d) $\lg \operatorname{tg} 45°8'$; (e) $\lg \sin 30°40'$; (f) $\lg \sin 5°4'$;
(g) $\lg \sin 81°52'$; (h) $\lg \operatorname{tg} 88°46'$.

34. (a) $\lg \cos 52°11'$; (b) $\lg \cos 64°26'$; (c) $\lg \operatorname{ctg} 11°2'$;
(d) $\lg \operatorname{ctg} 74°15'$; (e) $\lg \cos 81°58'$; (f) $\lg \cos 15°5'$;
(g) $\lg \operatorname{ctg} 84°41'$.

Найти по таблице острый угол α, если (задачи 35—36):

35. (a) $\lg \sin \alpha = \bar{1},1542$; (b) $\lg \sin \alpha = \bar{1},8344$;
(c) $\lg \operatorname{tg} \alpha = 1,0437$; (d) $\lg \operatorname{tg} \alpha = \bar{1},0437$;
(e) $\lg \operatorname{tg} \alpha = \bar{1},9946$; (f) $\lg \sin \alpha = \bar{1},3000$;
(g) $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0,5000$; (h) $\lg \sin \alpha = \bar{1},6983$.

36. (a) $\lg \cos \alpha = \bar{1},2525$; (b) $\lg \cos \alpha = \bar{1},0346$;
(c) $\lg \cos \alpha = \bar{2},6869$; (d) $\lg \operatorname{ctg} \alpha = 0,1245$;
(e) $\lg \operatorname{ctg} \alpha = \bar{1},0022$; (f) $\lg \cos \alpha = \bar{1},0400$;
(g) $\lg \cos \alpha = \bar{1},8793$; (h) $\lg \operatorname{ctg} \alpha = 1,1245$.

Пользуясь таблицей логарифмов чисел и таблицей логарифмов тригонометрических функций, вычислить следующие выражения (задачи 37—40):

37. $\dfrac{13,56 \sin 12°43'}{\cos 36°18'}$. **38.** $\dfrac{\sin^2 35°10' \cdot \operatorname{tg}^3 54°18'}{2,3 \cdot \cos 62°14'}$.

39. $\dfrac{\sqrt{\sin 41°20'} \cdot \operatorname{ctg} 13°28'}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 72°2'}}$. **40.** $\dfrac{\sin^2 16°17' \cdot \cos 51°41'}{0,0046 \cdot \sqrt{\operatorname{tg} 33°12'}}$.

Привести выражения к виду, удобному для логарифмирования, и найти с помощью таблиц значения этих выражений (задачи 41—44):

41. (a) $\dfrac{\cos \alpha - \cos 2\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha}$ при $\alpha = 12°22'$;

(b) $\dfrac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}$ при $\alpha = 24°8'$.

42. $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(45° + \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}(45° - \alpha)}$ при $\alpha = 31°15'$.

43. $\sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} - \sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$ при $\alpha = 112°34'$.

44. $\dfrac{\cos \alpha - 2 \sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin \alpha - 2 \cos 3\alpha - \sin 5\alpha}$ при $\alpha = 54°27'$.

Пользуясь таблицами, найти острый угол α, если (задачи 45—50):

45. (a) $\sin \alpha = \dfrac{0,73}{\sin 84°12'}$; (b) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\cos 17°15'}{0,03}$.

46. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\cos 12°17' \cdot 5,21^2 \sin 7°18'}$.

47. $\cos \alpha = \dfrac{1}{3} \sqrt{\dfrac{\cos 12°8' + \cos 15°14'}{\sin 58°41' + \sin 31°19'}}$.

48. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{10}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{10}}$. **49.** (a) $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\pi}{2}$; (b) $\sin \alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

50. (a) $\cos \alpha = \lg \operatorname{tg} 61°18'$; (b) $\sin \alpha = \lg \operatorname{ctg} 20°10'$.

С помощью логарифмических таблиц решить прямоугольный треугольник по следующим данным (задачи 51—56):

51. $c = 42{,}43$, $\alpha = 31°44'$. **52.** $c = 761$, $\alpha = 80°6'$.

53. $a = 184{,}3$, $\alpha = 28°48'$. **54.** $b = 49{,}41$, $\alpha = 59°44'$.

55. $a = 166{,}1$ $c = 187{,}3$. **56.** $a = 476{,}5$ $b = 1489$.

57. Решить прямоугольный треугольник, зная его угол $\alpha = 32°18'$ и биссектрису этого угла $l = 0{,}423$.

58. Из некоторой точки, лежащей в одной горизонтальной плоскости с основанием башни, верхушка башни видна под углом $\alpha = 35°14'$ к горизонту. Приблизившись к основанию башни так, что расстояние до основания башни уменьшилось на $d = 12$ *м*, наблюдатель видит верхушку башни под углом $\beta = 48°11'$. Найти высоту башни.

59. Сумма m двух неравных высот равнобедренного треугольника равна 40,2, угол α при основании равен $52°14'$. Найти боковую сторону.

60. Меньшая диагональ прямоугольной трапеции равна большему основанию, площадь трапеции $S = 28{,}5$ *см*^{2}, острый угол $\alpha = 58°38'$. Найти стороны трапеции. При каких значениях угла α задача имеет решение?

Пользуясь таблицами натуральных значений тригонометрических функций или логарифмической линейкой, решить треугольник по данной стороне и двум данным углам (задачи 61—64):

61. $a = 18$, $\alpha = 42°$, $\beta = 62°$. **62.** $b = 3$, $\alpha = 51°$, $\gamma = 58°$.

63. $c = 20$, $\beta = 124°$, $\gamma = 31°$. **64.** $b = 32$, $\alpha = 36°$, $\beta = 42°$.

Пользуясь таблицей логарифмов, решить треугольник по данной стороне и двум данным углам (задачи 65—68):

65. $c = 444{,}8$ $\alpha = 11°11'$, $\gamma = 57°37'$.

66. $a = 6{,}738$, $\beta = 20°20'$, $\gamma = 12°28'$.

67. $b = 0{,}731$, $\alpha = 28°14'$, $\gamma = 109°32'$.

68. $b = 479{,}4$, $\alpha = 20°3'$, $\beta = 102°38'$.

69. Две силы действуют под углом в 75° друг к другу. Равнодействующая делит этот угол в отношении 2:3. Найти величину равнодействующей, если меньшая из составляющих сил равна 2,6 *кГ*.

70. Чтобы определить расстояние от данной точки A до недоступной точки B, измерили базис $AC = 40{,}4$ *м* и углы $BAC = 57°38'$ и $ACB = 63°14'$. Найти AB.

Пользуясь таблицами натуральных значений тригонометрических функций или логарифмической линейкой, решить треугольник по данным двум сторонам и углу, заключенному между ними (задачи 71—74):

71. $a = 22$, $c = 26$, $\beta = 78°$. **72.** $b = 5$, $c = 10$, $\alpha = 102°$.

73. $a = 0{,}8$, $c = 0{,}6$ $\beta = 50°$. **74.** $a = 4$, $b = 5$, $\gamma = 60°$.

Пользуясь таблицей логарифмов, решить треугольник по данным двум сторонам и углу, заключенному между ними (задачи 75—78):

75. $a = 49{,}37$, $b = 26{,}44$, $\gamma = 47°18'$.
76. $a = 283{,}4$, $b = 268{,}5$, $\gamma = 63°38'$.
77. $a = 9{,}768$, $c = 2$, $\beta = 26°26'$.
78. $c = 0{,}024$, $b = 0{,}015$, $\alpha = 19°11'$.

79. На материальную точку действуют две силы: $p = 42{,}74$ *кГ* и $q = 34{,}08$ *кГ*, образующие между собой угол $\alpha = 64°24'$. Найти равнодействующую этих сил и углы, которые образует равнодействующая с данными силами.

80. В треугольнике ABC известны сторона $b = 16$, угол $\alpha = 122°$ и биссектриса $l = 10$, проведенная через вершину A. Найти две другие стороны треугольника ABC.

Пользуясь таблицами натуральных значений тригонометрических функций или логарифмической линейкой, решить треугольник по данным двум сторонам и углу, противолежащему одной из них (задачи 81—88):

81. $a = 12$, $c = 15$, $\gamma = 39°$.
82. $b = 3{,}5$, $a = 4{,}2$, $\alpha = 70°$.
83. $c = 0{,}12$, $b = 0{,}24$, $\beta = 44°$.
84. $a = 10$, $b = 6{,}6$, $\beta = 41°18'$.
85. $b = 18$, $a = 14$, $\alpha = 50°24'$.
86. $c = 32$, $b = 20$, $\beta = 47°36'$.
87. $c = 1{,}5$, $b = 2{,}4$, $\gamma = 28°30'$.
88. $b = 0{,}8$, $a = 0{,}7$, $\alpha = 19°$.

Пользуясь таблицей логарифмов, решить треугольник по данным двум сторонам и углу, противолежащему одной из них (задачи 89—96):

89. $a = 86{,}42$, $c = 73{,}46$, $\gamma = 49°19'$.
90. $b = 223{,}5$, $c = 327{,}9$, $\gamma = 116°20'$.
91. $b = 32{,}49$, $c = 52{,}39$, $\beta = 27°49'$.
92. $a = 67{,}31$, $c = 111$, $\alpha = 37°20'$.
93. $b = 4{,}587$, $c = 5{,}632$, $\beta = 20°14'$.
94. $a = 23{,}62$, $c = 45{,}63$, $\alpha = 36°43'$.
95. $a = 0{,}5715$, $b = 0{,}467$, $\beta = 19°18'$.
96. $a = 15{,}8$ $b = 17{,}9$, $\alpha = 21°17'$.

97. Хорда, стягивающая дугу сегмента в 280°, равна 9,6 *см*. В каком отношении разделит дугу сегмента точка на окружности, отстоящая от одного из концов хорды на 10 *см*?

98. Основания трапеции равны 27 и 9 *см*, а одна из диагоналей равна 24 *см* и образует с боковой стороной угол в 108°. Найти вторую диагональ.

Пользуясь таблицами натуральных значений тригонометрических функций или логарифмической линейкой, решить треугольник по трем данным сторонам (задачи 99—102):

99. $a = 40$, $b = 19$, $c = 41$.
100. $a = 1{,}5$, $b = 2{,}5$, $c = 1{,}8$.
101. $a = 6$, $b = 3$, $c = 3\sqrt{3}$
102. $a = \sqrt{10}$, $b = 4$, $c = \sqrt{2}$.

Пользуясь таблицей логарифмов, решить треугольник по трем данным сторонам (задачи 103—106):

103. $a = 24{,}57$, $b = 24{,}74$, $c = 10{,}05$.

104. $a = 125{,}3$, $b = 176{,}2$, $c = 91{,}2$.

105. $a = 10{,}03$, $b = 9{,}44$, $c = 15{,}07$.

106. $a = 0{,}2243$, $b = 0{,}2469$, $c = 0{,}3126$.

107. Длина минутной стрелки часов равна 60 *мм*, а длина часовой 54 *мм*. Через сколько времени после полудня расстояние между концами стрелок впервые будет равно 90 *мм*?

108. Стороны треугольника равны 12, 15 и 18 *см*. Найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными к большей стороне.

109. Сторона треугольника, равная 33 *см*, разделена на три равные части. Прямые, соединяющие точки деления с вершиной противолежащего угла, делят его на три угла. Найти эти углы, зная, что углы, прилежащие к данной стороне, равны 44° и 54°6′.

110. Две противоположные стороны четырехугольника, описанного около круга, равны 7 и 12 *см*, а два противоположных угла равны 36°52′ и 78°28′. Найти две другие стороны четырехугольника.

111. Острый угол ромба равен α. Под каким углом его сторона видна из середины противоположной стороны? В каком ромбе этот угол принимает наибольшее значение?

112. Для определения расстояния между двумя взаимно невидимыми точками C и D была провешена на местности прямая DN и на этой прямой выбраны две точки A и B, из которых видна точка C. Затем измерены расстояния $DA = 836$ *м* и $AB = 513$ *м* и углы $DAC = 54°16'$ и $DBC = 38°43'$. Найти CD.

113. Чтобы определить расстояние между двумя недоступными точками A и B, измерили базис $CD = 245$ *м* и углы $ACD = 32°14'$, $BCD = 48°23'$, $ADC = 62°7'$ и $BDC = 81°17'$. Найти AB.

114. На берегу моря из двух пунктов A и B, отстоящих друг от друга на расстоянии $d = 2{,}9$ *км*, наблюдают за пароходом, движущимся равномерно и прямолинейно. В некоторый момент времени пароход был виден из пункта A под углом $\alpha = 102°5'$ к направлению AB, а из пункта B — под углом $\beta = 51°12'$ к направлению BA. Через 10 минут углы изменились и стали соответственно равными $\alpha_1 = 84°16'$ и $\beta_1 = 74°34'$. Найти скорость парохода.

115. Тригонометрические знаки A, B и C образуют на местности равносторонний треугольник со стороной $a = 2{,}5$ *км*. Вычислить расстояния от пункта M, расположенного внутри угла ABC, до тригонометрических знаков, если из точки M сторона AB видна под углом $\alpha = 22°12'$, сторона BC — под углом $\beta = 10°28'$.

Указание. Применить теорему синусов к треугольникам ABM и BCM и найти угол BCM.

СВОДКА ВАЖНЫХ ФОРМУЛ

А. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}. \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \quad \sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}. \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

В. Формулы приведения:

$$\sin(-x) = -\sin x.$$
$$\cos(-x) = \cos x.$$
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$
$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$
$$\sin(2n\pi + x) = \sin x.$$
$$\cos(2n\pi + x) = \cos x.$$
$$\operatorname{tg}(n\pi + x) = \operatorname{tg} x.$$
$$\operatorname{ctg}(n\pi + x) = \operatorname{ctg} x.$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x.$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x.$$
$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\cos x.$$
$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = -\cos x.$$
$$\sin(2\pi - x) = -\sin x.$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x.$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x.$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x.$$
$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\sin x.$$
$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = \sin x.$$
$$\cos(2\pi - x) = \cos x.$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x.$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{ctg} x.$$
$$\operatorname{tg}(\pi-x)=-\operatorname{tg} x.$$
$$\operatorname{tg}(\pi+x)=\operatorname{tg} x.$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=\operatorname{ctg} x.$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=-\operatorname{ctg} x.$$
$$\operatorname{tg}(2\pi-x)=-\operatorname{tg} x.$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg} x.$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{tg} x.$$
$$\operatorname{ctg}(\pi-x)=-\operatorname{ctg} x.$$
$$\operatorname{ctg}(\pi+x)=\operatorname{ctg} x.$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=\operatorname{tg} x.$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=-\operatorname{tg} x.$$
$$\operatorname{ctg}(2\pi-x)=-\operatorname{ctg} x.$$

C. Преобразования тригонометрических функций:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$
$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}.$$
$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}.$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x.$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$
$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$
$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}.$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$
$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$
$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$
$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)].$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)].$$
$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)].$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}. \quad \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}.$$

D. Обратные тригонометрические функции:

$$\operatorname{Arcsin} x = (-1)^n \arcsin x + n\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2n\pi,$$

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + n\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arctg} x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + n\pi,$$

$$0 \leqslant \operatorname{arcctg} x \leqslant \pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\sin(\arcsin x) = x. \quad \cos(\arccos x) = x.$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x. \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x.$$

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}.$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right),$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x + \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Е. Соотношения между элементами треугольника (α, β, γ — углы, a, b, c — соответственно противолежащие стороны, S — площадь, $2p$ — периметр, R и r — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей):

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R \text{ теорема синусов.}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos\alpha;\\ b^2&=a^2+c^2-2ac\cos\beta;\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \end{aligned}\right\} \text{ теорема косинусов.}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b}&=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}};\\ \frac{b+c}{b-c}&=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}};\\ \frac{c+a}{c-a}&=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}} \end{aligned}\right\} \text{ теорема тангенсов}$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

$$R=\frac{abc}{4S},\quad r=\frac{S}{p}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{p-a};\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{p-b};\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{p-c}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

ОТВЕТЫ

К главе I

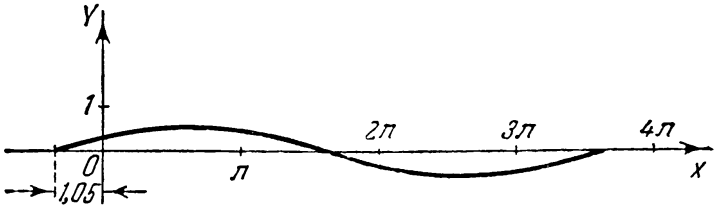
3. 14 и 48 *см*. **4.** 25 *см*. **5.** 1,25. **6.** 0,22. **7.** (c) да; (d) нет; (e) нет. **8.** (b) да; (c) нет; (d) нет. **9.** (a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; (b) $\sqrt{2}$. **10.** $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2}-1)$. **12.** $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$. **13.** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$. **14.** $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. **15.** (c) да, если $a>0$ и $b>0$. **16.** (c) да. **17.** (a) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; (b) $\cos\alpha=0{,}96$, $\operatorname{ctg}\alpha=3\frac{3}{7}$; (c) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$; (d) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{p\sqrt{q^2-p^2}}{q^2-p^2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}$. **18.** (a) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$; (c) $\sin\alpha=\frac{a^4-1}{a^4+1}$, $\cos\alpha=\frac{2a^2}{a^4+1}$. **19.** $\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. **30.** 2. **31.** 1. **32.** $\sin^2\alpha$. **33.** 4. **34.** 1. **35.** 1. **36.** $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$. **37.** -4. **38.** 0,22. **39.** (c) $\sin(30^\circ+\alpha)$. **40.** (d) $\cos\frac{120^\circ+\alpha}{2}$. **41.** (b) $\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)$. **42.** (c) $\operatorname{ctg}(60^\circ+2\alpha)$. **45.** 7. **55.** (a) 24°; (b) 66°; (c) 66°; (d) 39°. **56.** (a) 2,56; (b) 0,49. **57.** (a) 4; (b) 3,24. **59.** 0 и 4. **60.** 2. **61.** *c*. **62.** $\frac{d}{2}$. **63.** (d) III четверти; (e) II четверти. **64.** (b) II четверти; (d) I четверти. **65.** (c) 1116°. **68.** Через 12 мин., 1 час 24 мин. и $12(2n-1)$ мин. **69.** (c) III четверти. **70.** (c) $n=-5$, $\alpha=290^\circ$. **71.** Через 3 мин., 27 мин. и $3(4n-3)$ мин. **72.** n час. $\frac{60n}{11}$ мин., где $n=0, 1, 2, \ldots, 10$. **73.** (a) $\sin 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$; (b) $\cos 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (c) $\operatorname{tg} 225^\circ=1$; (d) $\operatorname{ctg} 300^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **74.** (b) $\sin 600^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (d) $\operatorname{tg}(-420^\circ)=-\sqrt{3}$;

(f) $\cos(-1110°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **75.** (a) 9; (b) 0; (c) $-10\sqrt{2}$; (d) $-1{,}5$. **76.** (a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; (b) 0,75; (c) 2; (d) 6. **77.** (a) $4\sqrt{2}$; (c) $-5\sqrt{3}$. **79.** (a) положительный. **81.** (a) 8; (b) 1; (c) 1. **82.** -1 и 2. **83.** -3, $\frac{5}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **84.** $-(x+y)$. **85.** $a-b$. **88.** (a) $180°\,n$; (d) $90°+180°\,n$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **89.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$. **90.** $\sin\alpha=\frac{40}{41}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{9}{40}$. **91.** $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. **92.** $\sin\alpha=\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **93.** $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha=3\frac{3}{7}$. **94.** $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **95.** $\sin\alpha=\pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. **96.** $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$. **97.** $\frac{17}{31}$. **98.** -5. **99.** 0,84. **104.** (a) $\pm\sin\alpha$; (b) $\pm\cos\alpha$. **105.** $\operatorname{tg}\alpha$. **106.** 4. **107.** $\pm(\sin\alpha+\cos\alpha)$. **108.** 1. **109.** (a) $-\frac{1}{2}$; (d) 1. **110.** (a) -1; (d) 1. **111.** (a) $-1{,}111$; b) 0,848. **112.** $-0{,}387$. **113.** 0. **114.** 0,643. **115.** $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$. **116.** $-\operatorname{tg}^2(2\alpha-\beta)$. **117.** 1. **118.** $1+\sin\alpha\cos\alpha$. **119.** (a) $\operatorname{tg}20°$; (d) $\operatorname{ctg}160°$. **120.** (a) 0; (e) -1; (f) 1. **121.** (b) -1; (d) 0. **122.** (a) $-\frac{1}{2}$; (b) $-\frac{1}{2}$; (c) -1; (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; (f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **123.** $-k$ и $-\frac{1}{k}$. **124.** $\frac{4}{5}$. **125.** $\frac{5}{3}$. **126.** $-\frac{16}{65}$. **127.** $-\frac{40}{41}$. **128.** $\frac{7}{24}$. **129.** (a) $-\operatorname{ctg}5°$; (c) $-\sin16°$; (e) $\cos40°$; (f) $\cos20°$; (h) $\cos18°$; (k) $\cos20°$; (l) $\operatorname{ctg}32°$. **130.** (a) $-0{,}940$; (c) $-0{,}342$; (h) 0,985. **131.** 0,902, $-1{,}276$, $-0{,}613$ и 0. **132.** (a) 211°; (b) 138°; (c) 126°; (d) 294°; (e) 210°; (f) 160°. **133.** (a) 19°; (b) 142°; (c) 223°. **137.** 4. **138.** $\frac{2(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin^3\alpha}$. **139.** $\frac{1}{2}\cos^2 25°$. **140.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 18°$. **141.** -1. **142.** $\cos32°-\sin32°$. **143.** $\operatorname{tg}^2\alpha$. **144.** $\frac{1}{2\cos^4\alpha}$.

К главе II

1. (a) $\frac{1}{3}$; (e) 5,5. **2.** (d) 5,6 *см*. **3.** (a) $\frac{4\pi}{3}$. **4.** (a) $\frac{\pi}{10\,800}$; (d) $\frac{7\pi}{6}$. **5.** (b) $-\frac{\pi}{4}$. **6.** (a) 18°; (b) $-135°$; (d) 5°. **7.** (b) 97°24′; (d) $-148°59'$; (e) 43°35′. **8.** (a) 80 *см/сек*. **9.** 2. **10.** $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{9}$. **11.** $\frac{3\pi}{5}$. **12.** 1,5. **13.** $\frac{\cos\alpha}{3}$. **14.** $-(\sin\alpha+\cos\alpha)$. **15.** $-\frac{\sqrt{3}}{15}$, $\frac{3\sqrt{2}-2}{7}$, $\frac{12+5\sqrt{3}}{23}$,

$\frac{12-5\sqrt{3}}{23}$, $\frac{3}{2}$. **16.** $-(7+4\sqrt{3})$, -1, $4\sqrt{3}-7$, -1. **17.** $\frac{3\pi-6}{6-2\pi\sqrt{3}}$, $\frac{\pi\sqrt{3}-2}{2(\pi\sqrt{3}+1)}$, -1, $-\frac{\pi\sqrt{2}+2}{2(\pi+1)}$. **18.** 0,842; 0,959; 0,994; 0,998. **21.** 0,023; 0,009; 0,003. **22.** (a) да; (b) нет; (d) да. **23.** (a) 2π; (b) 2π; (c) π. **26.** (a) нечетная; (c) четная; (d) ни четная, ни нечетная. **27.** (a) положительный; (c) отрицательный; (e) положительный; (i) положительный. **28.** (a) $\sin 0{,}7\pi > \sin 0{,}71\pi$; (c) $\operatorname{tg} 7{,}25\pi > \operatorname{tg} 7{,}2\pi$; (f) $\operatorname{ctg} 7{,}1\pi > \operatorname{ctg} 6{,}9\pi$. **29.** (a) отрицательный; (b) положительный; (e) отрицательный. **30.** $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$. **31.** $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$. **32.** $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$. **33.** $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$. **36.** $OP=4$, $4\sqrt{3}$, -4 и 4 *см*; через $1\frac{1}{3}$ *сек*. **37.** $s = 6\sin\frac{\pi}{14}t$. **38.** $s = 10\sin 4\pi t$. **39.** (a) $A=6$, $T=\frac{2\pi}{3}$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$; (b) $A=\frac{1}{2}$, $T=2$, $\varphi=-\frac{\pi}{4}$; (c) $A=0{,}2$, $T=20$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$; (f) $A=1$, $T=2\pi$, $\varphi=-2$. **41.** (b) См. черт. 53.



Черт. 53.

К главе III

1. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$. **4.** $\frac{1}{12}(2\sqrt{30}-1)$ и $-\frac{1}{12}(2\sqrt{30}+1)$. **5.** $-\frac{297}{425}$ и $-\frac{87}{425}$. **6.** $-\frac{44}{125}$. **7.** $\frac{5\sqrt{3}}{9}$. **8.** $-\frac{1}{10}(4\sqrt{3}-3)$. **9.** $\frac{25}{19}$ и $\frac{5}{31}$. **10.** $\frac{38}{41}$ и $\frac{2}{11}$. **11.** $-\frac{7}{17}$. **12.** $\frac{a-1}{a+1}$. **13.** $\frac{\sqrt{2}}{6}(2+\sqrt{5})$. **14.** $a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}$. **16.** $\frac{56}{65}$. **18.** (a) $\cos\alpha$; (b) $-\sqrt{2}\sin\alpha$. **19.** (a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$; (b) $-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. **20.** $\sin\alpha-\sin\beta$. **21.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **22.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **23.** $\cos 2\alpha$. **24.** $-\sin 2\alpha$. **25.** 0. **26.** $\sin(\alpha+\beta)\cos\beta$. **27.** (a) $\operatorname{tg} 3\alpha$; (b) $\operatorname{tg}\alpha$. **28.** (a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; (b) $\frac{\cos(20^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}$; (c) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha}$. **37.** $\frac{1}{4}$.

41. $2a\sqrt{1-a^2}$. **42.** $2a^2-1$. **43.** $-\frac{336}{625}$, $\frac{527}{625}$ и $-\frac{336}{527}$.
44. $1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **45.** $\pm\frac{4n(1-n^2)}{(1+n^2)^2}$ и $\pm\frac{4n(1-n^2)}{1-6n^2+n^4}$. **46.** $\frac{3}{4}$.
47. (a) $-\frac{116}{845}$; (b) $-\frac{253}{325}$; (c) $\frac{2016}{3713}$. **50.** 0,92 и $-0{,}92$. **51.** $-\frac{1}{8}$.
52. $\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$. **53.** При $x=\frac{\pi}{4}$; наибольшее значение функции равно $\sqrt{2}$. **54.** При $x=\frac{3\pi}{4}$. **55.** (b) $\frac{\sin 20^\circ}{2}$. **56.** (a) $\cos 4\alpha$; (b) $\cos 2\alpha$.
57. (a) $\operatorname{tg} 6\alpha$; (b) $\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{2}$. **58.** $\cos\alpha$. **59.** (a) $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}$; (b) $\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{2}$.
60. $\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$. **61.** $\sin 2\alpha$. **62.** (a) $\sin 2\alpha$; (b) $\cos 2\alpha$. **63.** 2. **64.** $\frac{2}{\sin 2\alpha}$.
65. (a) $\frac{1}{2}\sin 4\alpha$; (b) $\cos 4\alpha$. **83.** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$, $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$, $2-\sqrt{3}$. **84.** $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$.
85. $\sqrt{2}-1$. **86.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{14}}{4}$, $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **87.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $-\frac{\sqrt{5}}{5}$, -2.
88. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\frac{2}{3}$. **89.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{2}$. **90.** $\sqrt{a}$, если $a\leqslant 1$, и $\frac{\sqrt{a}}{a}$, если $a\geqslant 1$. **93.** (a) $\pm\sin\frac{\alpha}{4}$; (b) $\pm\cos\alpha$. **94.** (a) $\operatorname{tg}\alpha$; (b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$. **95.** (a) $\operatorname{tg} 51^\circ$. **101.** $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2(1+m)}}}{2}$.
102. $\pm\frac{\sqrt{1-m^2}}{1+m}$ и $\pm\frac{\sqrt{1-m^2}}{1-m}$. **103.** $\frac{20}{29}$, $\frac{21}{29}$, $\frac{20}{21}$. **104.** 4.
105. $\frac{4}{225}$. **106.** $\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. **108.** (a) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$; (b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$; (c) $\frac{1}{4}$. **109.** (a) 0,02; (b) 0,177; (c) 0,709. **110.** (a) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{2}$; (b) $\frac{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}{2}$. **111.** (a) $\frac{2\cos 2\alpha+1}{4}$; (b) $\frac{2\cos 2\alpha-1}{4}$.
112. (a) $\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{2}$; (b) $\frac{\cos 4\alpha+\cos 2\alpha}{2}$.
113. $\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos[2(\alpha+\beta)]-1}{4}$. **114.** $\frac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha}{4}$.
116. (a) $2\sin 16^\circ\cos 4^\circ$; (d) $-2\sin 15^\circ\sin 2^\circ$; (f) $2\cos\frac{5\pi}{72}\cos\frac{\pi}{72}$.
117. (a) $\cos 5^\circ$; (d) $2\cos\frac{3\pi}{20}\sin\frac{\pi}{20}$. **118.** (a) $\frac{1}{2\cos 10^\circ\cos 20^\circ}$; (b) $\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}$; (c) $-\frac{\sin 38^\circ}{\cos 12^\circ\cos 50^\circ}$; (d) $\frac{\sin 10^\circ}{\sin 15^\circ\sin 25^\circ}$.

119. (a) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$; (b) $\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. **120.** (a) $4\sin 20^\circ\cos 12^\circ\cos 8^\circ$; (b) $4\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$. **121.** (a) $4\cos 25^\circ\sin 53^\circ\cos 26^\circ$; (b) $4\cos(18^\circ+\alpha)\sin\left(36^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(18^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. **122.** (a) $\frac{1}{2\sin 28^\circ}$; (b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. **123.** (a) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; (b) $-\frac{1}{\cos 2\alpha}$. **124.** (a) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; (b) $\frac{2\sin\alpha}{\sin 4\alpha}$. **125.** (a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}{\cos 4\alpha\cos 3\alpha}$; (b) $\frac{2\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\beta}$. **126.** (a) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha-\beta)}$; (b) $-\frac{\sin 2\alpha}{2}$. **127.** $\operatorname{ctg} 2\alpha$. **128.** $-4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha$. **134.** (b) $2\sin^2\frac{\alpha}{4}$. **135.** (b) $2\sin^2 29^\circ$. **136.** (a) $2\cos^2\frac{\pi-\alpha}{4}$; (b) $2\sin^2\frac{\pi-3\alpha}{4}$. **137.** $\operatorname{tg}^2\alpha$. **138.** $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **139.** (a) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; (b) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **140.** $2\sin^2\frac{5\alpha}{2}$. **141.** $4\cos^2\alpha$. **142.** $\cos\alpha\cos 3\alpha$. **149.** (a) $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$; (b) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$. **150.** (a) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$; (b) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **151.** (a) $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$; (b) $\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)}{\cos^2 2\alpha}$. **152.** (a) $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$; (b) $2\sqrt{3}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **153.** (a) $25\sin(\alpha+0{,}284)$; (b) $13\sin(0{,}395-\alpha)$. **154.** (a) $q^2\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)$, где $\sin\beta=\frac{p}{q}$. **155.** $(p^2+q^2)\times\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$, где $\sin\beta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$ и $\cos\beta=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$. **156.** (a) 1) $\frac{\pi}{8}$, 2) $\sqrt{2}$; (b) 1) $\frac{\pi}{4}$, 2) $\sqrt{2}$. **157.** (a) 1) $\frac{\pi}{6}$, 2) 2; (b) 1) $\frac{\pi}{3}$, 2) 2. **158.** (a) 1) 0,322, 2) 5; (b) 1) 0,97, 2) 41. **159.** (a) 1) 0,506, 2) $\sqrt{5}$; (b) 1) 1,82, 2) $\sqrt{17}$. **160.** 1) $\frac{\pi}{12}$, 2) 1.

К главе IV

1. (b) $\alpha = 2\operatorname{Arccos}\frac{1}{5}$. **2.** (a) $\alpha = \operatorname{Arcsin} 0{,}1 - \frac{\pi}{3}$. **3.** (c) $\alpha = p(\operatorname{Arctg} r + q)$. **4.** (a) $\alpha = \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{3}$; (b) $\alpha = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$; (d) $\alpha = \pi n$. **5.** (b) $\alpha = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}$; d) $\alpha = \pi(2n+1)$. **6.** (b) $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n$; (c) $\alpha = -\frac{\pi}{3} + \pi n$. **7.** (a) $\pi n - (-1)^n \frac{\pi}{3}$; (b) $\pi n + (-1)^n \frac{\pi}{4}$. **8.** (a) $2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}$; (c) $2\pi n$. **9.** (b) $\frac{2\pi}{3} + \pi n$. **10.** $-\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$ и $\frac{11\pi}{4}$. **11.** $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{10\pi}{3}$, $\frac{14\pi}{3}$, $\frac{16\pi}{3}$. **12.** $-\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$. **13.** $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. **14.** (a) $-3 \leqslant x \leqslant 3$; (b) $-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$; (c) $-\frac{1}{m} \leqslant x \leqslant \frac{1}{m}$. **15.** (a) $0 \leqslant x \leqslant 1$; (b) $0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$; (c) $-1 \leqslant x \leqslant 3$. **16.** (a) $x = \frac{1}{2}\cos y$; (b) $x = -\cos y$; (c) $x = 2\sin y$; (d) $x = \cos 3y$; (h) $x = 1 - 4\sin\left(y - \frac{\pi}{8}\right)$. **17.** $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$, 0, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$. **18.** $-0{,}848$; $-0{,}253$; $0{,}253$; $0{,}848$; $1{,}571$. **19.** 1,379; 1,107; 1,107; 2,094; 2,090; 2,035. **20.** $\frac{\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{6}$. **21.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{4S}{c^2}$ и $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4S}{c^2}$. **22.** $2R\left(1 + \arcsin\frac{r}{R-r}\right)$. **24.** При $x = 1$, 0 и -1. **25.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ и $\frac{\pi}{12}$. **26.** $\frac{3+8\pi}{12}$ и 1. **27.** (a) отрицательный; (b) отрицательный; (c) положительный; (d) отрицательный. **28.** (a) отрицательный; (b) отрицательный; (c) отрицательный. **29.** (a) нечетная; (b) ни четная, ни нечетная; (d) четная. **33.** (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\frac{4}{5}$. **34.** (a) 1; (b) $\frac{12}{5}$. **35.** (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **38.** (a) $-\frac{\pi}{7}$; (b) $\frac{\pi}{6}$; (c) $\frac{\pi-2}{2}$; (d) $2-\pi$. **39.** (a) 0; (b) $\frac{\pi}{7}$; (c) $\frac{5\pi}{8}$; (d) $0{,}8\pi$. **40.** $\frac{56}{65}$. **41.** $\frac{1}{21}$. **42.** 0. **43.** $-\frac{4}{8}$. **44.** $\frac{13}{85}$. **45.** $\frac{8\sqrt{5}}{81}$. **55.** Нельзя. **62.** $\pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ $[= 180^\circ\ n + (-1)^n 30^\circ]$. **64.** $15^\circ + 180^\circ n$. **66.** $\frac{5\pi - 3}{6} + \pi n$. **68.** $\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi n}{2}$ $[= 67^\circ 30' + 270^\circ n]$. **69.** $4\pi n - (-1)^n \frac{2\pi}{3} - 1$. **70.** $60^\circ n - 26^\circ$. **71.** $\frac{\pi n}{4} \pm \frac{\pi}{12}$ $[= 45^\circ n \pm 15^\circ]$. **72.** $\frac{\pi}{2}(4n+1)$ $[= 90^\circ(4n+1)]$ и $\pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ $[= 180^\circ n + (-1)^n 30^\circ]$.

73. $\frac{\pi n}{3}[=60°n]$ и $\frac{\pi n}{3}+0{,}369\,[=60°n+21°9']$.

74. $2\pi n+\frac{3\pi}{4}[=360°n+135°]$ и $2\pi n+0{,}296\,[=360°n+16°56']$.

75. $\frac{\pi}{2}(4n+1)\,[=90°(4n+1)]$, $\pi n-(-1)^n\,0{,}848\,[=180°n-(-1)^n\,48°35']$.

76. $\frac{\pi}{4}+\pi n\,[=45°+180°n]$ и $1{,}373+\pi n\,[=78°41'+180°n]$.

77. $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n\,[=-15°+60°n]$ и $-0{,}369+\frac{\pi n}{3}\,[=-21°9'+60°n]$.

78. Решение уравнения возможно, если $mn\leqslant 1$; $x=\operatorname{Arctg}\frac{1\pm\sqrt{1-mn}}{m}$, если $m\neq 0$ и $n\neq 0$; $x=\operatorname{Arctg}\frac{2}{m}$, если $n=0$; $x=\operatorname{Arctg}\frac{2}{n}$, если $m=0$. **79.** $\pm\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{b-c}{b-a}}$; решение уравнения возможно, если $a\neq b$ и $a\leqslant c\leqslant b$ или $b\leqslant c\leqslant a$; при $a=b=c$ уравнение обращается в тождество. **80.** 75°31′ и 28°58′. **81.** 38°10′ и 51°50′. **82.** 58°17′ и 31°43′. **83.** πn и $2\pi n\pm\frac{2\pi}{3}$. **84.** $\frac{\pi n}{2}$ и $\frac{\pi}{6}(2n+1)$. **85.** $\frac{\pi}{12}(6n+1)$ и $\frac{\pi n}{3}+\frac{\pi}{9}$. **86.** $\frac{\pi}{10}(2n+1)$ и $\frac{\pi}{2}(2n+1)$. **87.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ и $\frac{\pi}{4}+\pi n$. **88.** $\frac{\pi}{3}(2n+1)$ и $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **89.** $2\pi n\pm\frac{\pi}{3}$. **90.** $\frac{\pi}{3}(3n\pm 1)$ и $\frac{\pi}{2}(2n+1)$. **91.** $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$. **92.** $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}$. **93.** πn и $-\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+\pi n$. **94.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. **95.** $-\frac{\pi}{4}+\pi n$ и $-\operatorname{arctg}4+\pi n$. **96.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$ и $\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+\pi n$. **97.** $\operatorname{arctg}4+\pi n$. **98.** $\operatorname{arctg}5+\pi n$ и $-\operatorname{arctg}2+\pi n$. **99.** $\pm\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{1}{a+b}}$, если $a+b>0$ и $a\neq b$; при $a=b$ уравнение обращается в тождество. **100.** 40°54′. **101.** 9°5′. **102.** $\frac{\pi}{2}n$. **103.** $\frac{\pi n}{7}$ и $\frac{\pi n}{3}$. **104.** $\frac{\pi}{2}(2n+1)$. **105.** $\frac{2\pi n}{5}$. **106.** $\frac{\pi n}{4}+\frac{3\pi}{16}$. **107.** $\frac{\pi n}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}$. **108.** $90°n+(-1)^n\,22°30'-34°$. **109.** πn. **110.** $180°n\pm 60°-30°$. **111.** $\frac{\pi n}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{10}$. **112.** $\pi n+\frac{\pi}{3}$. **113.** $\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$. **114.** $\pi n+(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}$. **115.** πn и $2\pi n\pm\frac{3\pi}{4}$. **116.** $\frac{\pi}{2}(2n+1)$ и $\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}$. **117.** $n\pi-\frac{\pi}{4}$. **118.** $\frac{\pi}{4}(2n+1)$ и $\frac{\pi}{2}n+(-1)^n\frac{\pi}{12}$. **119.** $\frac{\pi n}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{24}$. **120.** $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+n\pi$. **121.** $4\pi n$ и $4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+4\pi n$. **122.** 15° или 75°.

123. $48°35'$ и $82°50'$; $\frac{2}{3} < m \leqslant \sqrt{2}$. **124.** $\frac{\pi}{5}(2n+1)$ и $2\pi n$. **125.** $60°n$ и $180°n + 15°$. **126.** $120°n - 20°$. **127.** $\pi n - \frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{6}$. **128.** $\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{16}$. **129.** $\frac{4\pi n}{5}$ и $\frac{2\pi}{3}(2n+1)$. **130.** $\frac{3\pi}{16}(2n+1)$. **131.** $\pi(2n+1) - \frac{\pi}{6}$ и $\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{30}$. **132.** $2\pi n - \frac{\pi}{2}$ и $2\pi n$. **133.** $180°n \pm 37°,5$. **134.** $2\pi n + \frac{\pi}{4}$ и $\frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{4}$. **135.** $\frac{\pi n}{4}$ и $\frac{\pi}{16}(2n+1)$. **136.** $180°n - 60°$ и $180°n + 40°$. **137.** $\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{9}$. **138.** $90°n - 10°$. **139.** $\frac{\pi}{8}(2n+1)$ и $\frac{2\pi n}{3} \pm \frac{\pi}{9}$. **140.** $\frac{\pi n}{3}$. **141.** $\frac{\pi}{2}(2n+1)$ и $\frac{2\pi n}{7} \pm \frac{\pi}{42}$. **142.** πn. **143.** $2\pi n$ и $4\pi n \pm \frac{2\pi}{3}$. **144.** $\frac{\pi}{2}n$ и $2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}$. **145.** πn и $\frac{\pi}{3}(2n+1)$. **146.** $\frac{\pi n}{3}$. **147.** $2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $\frac{\pi}{4} + \pi n$. **148.** $180°n + 45°$ и $180°n + 35°$. **149.** $\frac{\pi}{8}(2n+1)$ и $\pi n \pm \frac{\pi}{3}$. **150.** $\frac{\pi}{4}(2n+1)$ и $\frac{\pi}{6}(2n+1)$. **151.** $\frac{\pi}{8}(2n+1)$ и $\frac{\pi n}{2} \pm \frac{\pi}{6}$. **152.** $2\pi n$ и $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **153.** $\pi n + (-1)^n \arcsin\frac{2}{5} - \arcsin\frac{3}{5}$ $[= 180° + (-1)^n 23°34' - 36°52']$ или $2\pi n - 2\operatorname{arctg} 0{,}117$ $[= 360°n - 13°18']$ и $2\pi n + 2\operatorname{arctg} 1{,}717$ $[= 360°n + 119°34']$. **154.** $\frac{\pi n}{3} + \frac{1}{3}(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{1}{3}\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}$ $[= 60°n + (-1)^n 8°51' - 21°8']$. **155.** $180°n - 42°42'$. **156.** $\pi n + (-1)^n \arcsin\frac{6}{\sqrt{41}} + \arcsin\frac{5}{\sqrt{41}}$. $[= 180°n + (-1)^n 69°34' + 51°21']$. **157.** $51°4'$ и $128°56'$. **158.** $36°52'$ и $53°8'$. Наименьшее значение, равное $2(3 + 2\sqrt{2})$, величина m принимает в равнобедренном треугольнике. Нет, не существует.

К главе V

1. (a) $\sin\gamma$; (b) $\sin\frac{\gamma}{2}$. **2.** $\frac{3 + 8\sqrt{2}}{15}$. **3.** 1. **11.** $30°$, $60°$ и $90°$. **13.** $\frac{4691}{3456}$. **14.** $60°$. **19.** $150\sqrt{3}$. **20.** $\approx \frac{1}{5}$ *га*. **21.** $2R^2\cos\frac{\alpha}{2} \times \cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$. **22.** $\frac{1}{2}|n^2 - m^2|\operatorname{tg}\varphi$. **23.** (a) отрицательный; (b) отрицательный; (c) отрицательный; (d) положительный; e) положительный; **24.** (b) отрицательный; (e) положительный; **25.** (a) положительный; (c) отрицательный; (e) отрицательный. **26.** (b) 0. **28.** $\lg\sin 2\alpha$. **29.** (a) $\bar{1}$, 5828; (c) $\bar{1}$, 8975. **30.** (a) $\bar{1}$, 7854; (d) $\bar{1}$, 1640. **31.** (a) $23°6'$;

(d) 5°15′; (e) 34′; (f) 9°33′. **32.** (a) 78°12′; (b) 63°24′; (c) 45°42′; (f) 69°30′. **33.** (a) $\bar{1}$, 8028; (b) $\bar{1}$, 9244; (d) 0,0020; (f) 2,9460. **34.** (a) $\bar{1}$,7876; (c) 0,7100; (f) $\bar{1}$, 9848; (g) $\bar{2}$,9688. **35.** (a) 8°12′; (b) 43°5′; (c) 84°50′; (d) 6°19′. **36.** (b) 83°47′; (e) 84°16′; (g) 40°46′. **37.** 3,703. **38.** 0,8341. **39.** 2,332. **40.** 131. **41.** (a) 0,03636; (b) 2,825. **42.** 12,96. **43.** 0,8312. **44.** — 0,008277. **45.** (a) 47°12′; (b) 88°12′. **46.** 73°39′. **47.** 66°39′. **48.** 20°54′. **49.** (a) 32°29′; (b) 51°46′. **50.** (a) 74°50′; (b) 25°47′. **51.** $a = 22{,}31$; $b = 36{,}08$; $\beta = 58°16'$. **52.** $a = 749{,}8$; $b = 130{,}8$; $\beta = 9°54'$. **53.** $b = 335{,}2$; $c = 382{,}5$; $\beta = 61°12'$. **54.** $a = 84{,}66$; $c = 98{,}03$; $\beta = 30°16'$. **55.** $b = 86{,}48$; $\alpha = 62°30'$; $\beta = 27°30'$. **56.** $c = 1563$; $\alpha = 17°45'$; $\beta = 72°15'$; **57.** $a = 0{,}2568$; $b = 0{,}4063$; $c = 0{,}4806$; $\beta = 57°42'$. **58.** 23,02. **59.** 22,86. **60.** Основания: 6,631 *см* и 3,038 *см*; боковые стороны: 6,902 *см* и 5,894 *см*. Задача имеет решение при $\alpha > 45°$. **61.** $b = 23{,}8$; $c = 26{,}1$ и $\gamma = 76°$. **62.** $a = 2{,}47$; $c = 2{,}69$; $\beta = 71°$. **63.** $a = 16{,}4$; $b = 32{,}2$; $\alpha = 25°$. **64.** $a = 28{,}1$; $c = 46{,}8$; $\gamma = 102°$. **65.** $a = 102{,}2$; $b = 491{,}1$; $\beta = 111°12'$. **66.** $b = 4{,}321$; $c = 2{,}685$; $\alpha = 147°12'$. **67.** $a = 0{,}5144$; $c = 1{,}025$; $\beta = 42°14'$. **68.** $a = 168{,}5$; $c = 413{,}6$; $\gamma = 57°19'$. **69.** 5,02 *кГ*. **70.** 42 *м*. **71.** $b = 30{,}4$; $\alpha = 45°6'$; $\gamma = 56°54'$. **72.** $a = 12{,}1$; $\beta = 23°54'$; $\gamma = 54°6'$. **73.** $b = 0{,}619$; $\alpha = 82°4'$; $\gamma = 47°56'$. **74.** $c = 4{,}58$; $\alpha = 49°6'$; $\beta = 70°54'$. **75.** $c = 36{,}96$; $\alpha = 100°59'$; $\beta = 31°43'$. **76.** $c = 291{,}2$; $\alpha = 60°40'$; $\beta = 55°42'$. **77.** $b = 8{,}028$; $\alpha = 147°12'$; $\gamma = 6°22'$. **78.** $a = 0{,}011$; $\beta = 26°37'$; $\gamma = 134°12'$. **79.** 65,15 *кГ*; 36°16′ и 28°8′. **80.** 39,86 и 29. **81.** $b = 22{,}3$; $\alpha = 30°14'$; $\beta = 110°46'$. **82.** $c = 3{,}81$; $\beta = 51°34'$; $\gamma = 58°26'$. **83.** $a = 0{,}311$; $\alpha = 115°40'$; $\gamma = 20°20'$. **84.** $c = 7{,}51$; $\alpha = 90°$; $\gamma = 48°42'$. **85.** $c_1 = 13{,}4$; $c_2 = 9{,}6$; $\beta_1 = 82°12'$; $\beta_2 = 97°48'$; $\gamma_1 = 47°24'$; $\gamma_2 = 31°48'$. **86.** Задача не имеет решения. **87.** $a_1 = 1{,}14$; $a_2 = 3{,}08$; $\alpha_1 = 21°16'$; $\alpha_2 = 101°44'$; $\beta_1 = 130°14'$; $\beta_2 = 49°46'$. **88.** $c_1 = 1{,}41$; $c_2 = 0{,}1$; $\beta_1 = 21°50'$; $\beta_2 = 158°10'$; $\gamma_1 = 139°10'$; $\gamma_2 = 2°50'$. **89.** $b_1 = 89{,}56$; $b_2 = 23{,}09$; $\alpha_1 = 63°6'$; $\alpha_2 = 116°54'$; $\beta_1 = 67°35'$; $\beta_2 = 13°47'$. **90.** $a = 160{,}5$; $\alpha = 26°1'$; $\beta = 37°39'$. **91.** $a_1 = 67{,}73$; $a_2 = 24{,}91$; $\alpha_1 = 103°24'$; $\alpha_2 = 20°58'$; $\gamma_1 = 48°47'$; $\gamma_2 = 131°13'$. **92.** $b = 88{,}24$; $\beta = 52°40'$; $\gamma = 90°$. **93.** $a_1 = 9{,}44$; $a_2 = 1{,}133$; $\alpha_1 = 134°38'$; $\alpha_2 = 4°54'$; $\gamma_1 = 25°8'$; $\gamma_2 = 154°52'$. **94.** Задача не имеет решения. **95.** $c_1 = 0{,}9663$; $c_2 = 0{,}1121$; $\alpha_1 = 23°51'$; $\alpha_2 = 156°9'$; $\gamma_1 = 136°51'$; $\gamma_2 = 4°33'$. **96.** $c_1 = 31{,}09$; $c_2 = 2{,}278$; $\beta_1 = 24°17'$; $\beta_2 = 155°43'$; $\gamma_1 = 134°26'$; $\gamma_2 = 3°$. **97.** 3:7 (прибл.). **98.** 14 *см*. **99.** $\alpha = 73°30'$; $\beta = 27°6'$; $\gamma = 79°24'$. **100.** $\alpha = 36°27'$; $\beta = 98°5'$; $\gamma = 45°28'$. **101.** $\alpha = 90°$; $\beta = 30°$; $\gamma = 60°$. **102.** $\alpha = 45°$; $\beta = 116°34'$; $\gamma = 18°26'$. **103.** $\alpha = 77°18'$; $\beta = 79°12'$; $\gamma = 23°30'$. **104.** $\alpha = 42°36'$; $\beta = 107°54'$; $\gamma = 29°30'$. **105.** $\alpha = 40°44'$; $\beta = 37°52'$; $\gamma = 101°24'$. **106.** $\alpha = 45°24'$; $\beta = 51°38'$; $\gamma = 82°58'$. **107.** Приблизительно через 19 мин. **108.** 5°6′. **109.** 28°5′; 32°; 21°49′. **110.** 13,3 *см* и 5,7 *см*. **111.** $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16\cos^2\alpha}}$. Угол β принимает наибольшее значение в квадрате. **112.** 981 *м*. **113.** 122 *м*. **114.** 20 *км/час*. **115.** 4,620 *км*; 6,067 *км* и 3,723 *км*.